

## 2013 年新知杯上海市初中数学竞赛试题

一、填空题：（每题 10 分）

1. 已知  $a = \frac{1}{2+\sqrt{7}}$ ,  $b = \frac{1}{2-\sqrt{7}}$ , 则  $a^3 - a + b^3 - b =$  \_\_\_\_\_.

分析：结果式子是对称式，因此需要计算两数之和与两数之积。

$$a+b = \frac{1}{2+\sqrt{7}} + \frac{1}{2-\sqrt{7}} = \frac{2-\sqrt{7}+2+\sqrt{7}}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})} = -\frac{4}{3}, \quad a \times b = \frac{1}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})} = -\frac{1}{3},$$

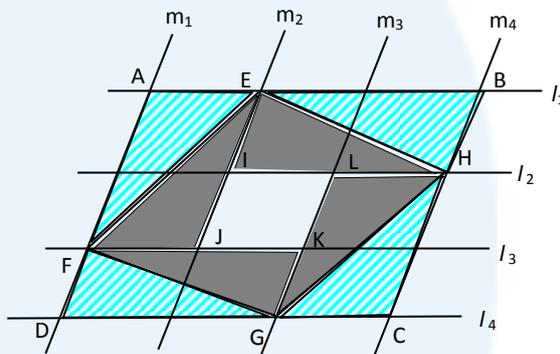
$$\begin{aligned} \therefore a^3 - a + b^3 - b &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] - (a+b) \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right)\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)\right] - \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{27}. \end{aligned}$$

2. 已知直线  $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$ , 直线  $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3 \parallel m_4$ ,  $S_{ABCD} = 100$ ,  $S_{ILKJ} = 20$ , 则

$S_{EFGH} =$  \_\_\_\_\_.

分析：用割补法，把 EFGH 四条“边”上的三角形移到 ABCD 四个“角”上，它们的面积相等。

$$\begin{aligned} \therefore S_{AFE} &= S_{JFE}, \quad S_{BEH} = S_{IEH}, \\ S_{CHG} &= S_{LHG}, \quad S_{DFG} = S_{KFG}, \\ \therefore 2S_{EFGH} &= S_{ABCD} + S_{ILKJ} = 120, \\ \therefore S_{EFGH} &= 60. \end{aligned}$$



3. 已知  $\angle A = 90^\circ$ ,  $AB=6$ ,  $AC=8$ ,  $E, F$  在  $AB$  上, 且  $AE=2$ ,  $BF=3$ , 过  $E$  作  $AC$  的平行线交  $BC$  于  $D$ ,  $FD$  的延长线交  $AC$  的延长线于  $G$ , 则  $GF =$  \_\_\_\_\_.

分析：GF 在直角三角形 AFG 中，AF 的长已知，关键是求 AG。图中有平行线，所以要用到平行线截得成比例线段定理。

解：在  $\triangle ABC$  中， $\because DE \parallel AC$ ,  $\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{6}$ , 而  $AC=8$ ,

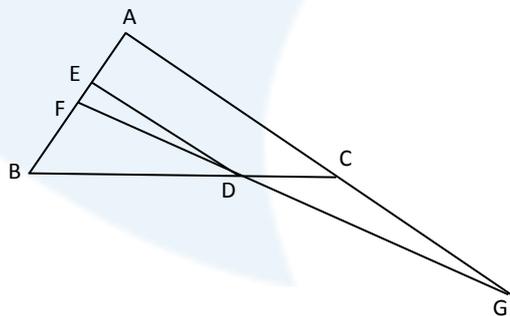
$$\therefore DE = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3},$$

在  $\triangle AFG$  中， $\because DE \parallel AG$ ,  $\therefore \frac{DE}{AG} = \frac{FE}{FA} = \frac{1}{3}$ , 而  $DE = \frac{16}{3}$ ,

$$\therefore AG = 3DE = 16.$$

在  $\text{Rt}\triangle AFG$  中，

$$FG = \sqrt{AF^2 + AG^2} = \sqrt{3^2 + 16^2} = \sqrt{265}.$$



4. 已知凸五边形的边长为  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ ,  $f(x)$  为二次三项式，当  $x = a_1$  或者  $x = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$  时， $f(x) = 5$ ，当  $x = a_1 + a_2$  时， $f(x) = p$ ，当  $x = a_3 + a_4 + a_5$  时， $f(x) = q$ ，则  $p - q =$  \_\_\_\_\_.

分析:  $\because f(x)$  为二次三项式,  $\therefore$  二次函数  $y = f(x)$  的图像是一条抛物线,

$\because a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  是 (凸) 五边形的边长,  $\therefore$  不妨把这条抛物线画成开口向上的, 如图.

不妨设  $0 < a_1 < a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ , 依题有:  $f(a_1) = f(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$  ( $=5$  是没有作用的), 这说明抛物线的对称轴是

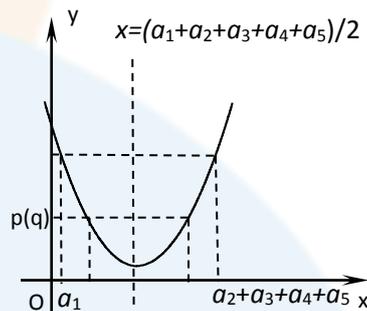
$$\text{直线: } x = \frac{a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}{2},$$

$$\text{又 } \because x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} = \frac{(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5)}{2},$$

$\therefore$  在  $x$  轴上, 点  $a_1 + a_2$  与点  $a_3 + a_4 + a_5$  是关于对称轴  $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2}$  对称的两点,

$\therefore f(a_1 + a_2) = f(a_3 + a_4 + a_5)$ , 即  $p = q$ ,

$\therefore p - q = 0$ .



5. 已知一个三位数是 35 的倍数, 且各个数位上的数字之和为 15, 则这个三位数是\_\_\_\_\_.

分析: 数字之和为 15, 这说明该三位数一定是 3 的倍数, 又因为该数是 35 的倍数, 所以它一定是 105 的倍数, 经检验 735 是唯一解.

6. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + ax + (m+1)(m+2) = 0$  对于任意实数  $a$  都有实数根, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

分析: 原方程对于任意实数  $a$  都有实数根  $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4(m+1)(m+2) \geq 0$  即  $(m+1)(m+2) \leq \frac{a^2}{4}$  对于任意实数  $a$  都成立,

注意到要求的是  $m$  的取值范围, 而右边有最小值 0, 故只须

$$(m+1)(m+2) \leq \left(\frac{a^2}{4}\right)_{\text{最小值}} = 0, \therefore (m+1)(m+2) \leq 0, \therefore -2 \leq m \leq -1.$$

7. 已知四边形 ABCD 的面积为 2013, E 为 AD 上一点,  $\triangle BCE, \triangle ABE, \triangle CDE$  的重心分别是  $G_1, G_2, G_3$ , 那么  $\triangle G_1G_2G_3$  的面积为

分析: 三角形三条中线的交点称为重心. 重心的基本性质是: 重心到一边中点的连线长等于所在中线的  $\frac{1}{3}$ . 据此,

过点  $G_1$  作 BC 的平行线, 交 BA 于 M,  $\because G_1$  是  $\triangle BCE$  的重心,  $\therefore BM = \frac{1}{3} BA$ ,

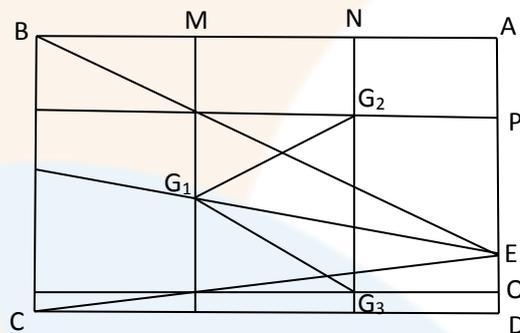
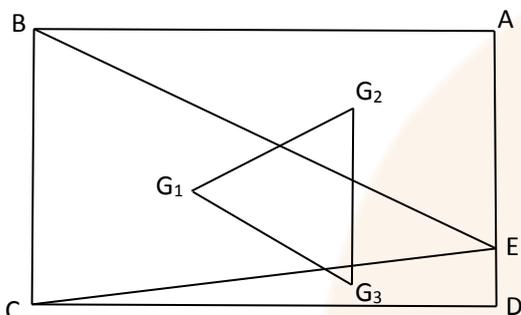
过点  $G_2$  作 BC 的平行线, 交 BA 于 N,  $\because G_2$  是  $\triangle ABE$  的重心,  $\therefore NA = \frac{1}{3} BA$ ,

过点  $G_2$  作 BA 的平行线, 交 AD 于 P,  $\because G_2$  是  $\triangle ABE$  的重心,  $\therefore AP = \frac{1}{3} AE$ ,

过点  $G_3$  作 BA 的平行线, 交 AD 于 Q,  $\because G_3$  是  $\triangle CDE$  的重心,  $\therefore DQ = \frac{1}{3} DE$ ,

$\therefore PQ = PE + EQ = \frac{2}{3}AE + \frac{2}{3}ED = \frac{2}{3}AD$ , 而  $\triangle G_1G_2G_3$  的  $G_2G_3$  边上的高  $= \frac{1}{3}AB$ ,

$\therefore \triangle G_1G_2G_3$  的面积  $= \frac{2}{3}AD \times \frac{1}{3}AB = \frac{2}{9}$  四边形 ABCD 的面积  $= \frac{2}{9} \times 2013 = \frac{671}{3}$ .



8. 直角三角形斜边 AB 上的高 CD=3, 延长 DC 到 P, 使得 CP=2, 过 B 作  $BF \perp AP$ , 交 CD 于 E, 交 AP 于 F, 则  $DE = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**分析:** 本题涉及到直角三角形斜边上的高, 就要考虑射影定理, 即, 直角边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项;

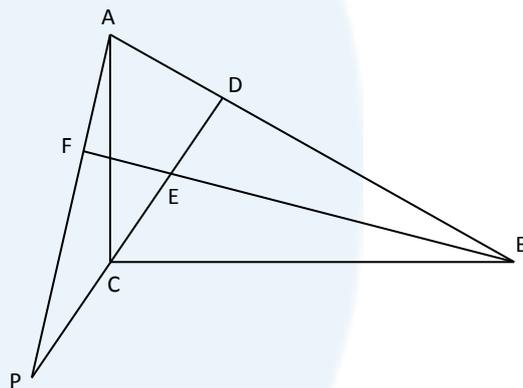
本题涉及到两个角的两边分别垂直, 就要考虑到这两个角相等;

既然有角相等, 就要考虑相似三角形.

$\because \angle DBE = \angle P, \angle DBE = \angle PAD, \therefore \triangle ADP \sim \triangle EDB$ ,

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{PD},$$

$$\therefore DE = \frac{AD \cdot BD}{PD} = \frac{CD^2}{PD} = \frac{9}{5}.$$



**二、解答题:** (第 9 题、第 10 题 15 分, 第 11 题、第 12 题 20 分)

9. 已知  $\angle BAC = 90^\circ$ , 四边形 ADEF 是正方形且边长为 1, 求  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  的最大值.

**分析:** 本题需从结论入手, 如果按常规通分, 那是死路一条. 于是考虑用特殊变形. 注意到正方形边长为 1, 即  $DE = EF = 1$ , 代入到前两项的分子中, 就成为比例式. 不妨一试:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{EF}{AB} + \frac{DE}{AC} + \frac{1}{BC} = \frac{CE}{BC} + \frac{BE}{BC} + \frac{1}{BC} = 1 + \frac{1}{BC},$$

因此, 欲求  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  的最大值只需求 BC 的最小值.

$$\text{而 } BC^2 = AB^2 + AC^2 = (1 + BD)^2 + (1 + FC)^2 = BD^2 + FC^2 + 2(BD + FC) + 2$$

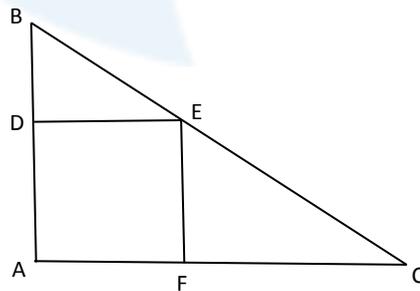
这里需要用基本不等式  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  和  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  ( $a, b > 0$ ) 吗?

试一试:

$$BD^2 + FC^2 \geq 2BD \cdot FC \text{ (等号当且仅当 } BD = FC \text{ 取得),}$$

$$BD + FC \geq 2\sqrt{BD \cdot FC} \text{ (等号当且仅当 } BD = FC \text{ 取得),}$$

等号取得的条件是一致的! 只需要证实  $BD \cdot FC$  是常数即可.



考查含有  $BD$  和  $FC$  的两个三角形, 即  $\triangle BDE$  和  $\triangle EFC$ , 它们是相似的!

于是,  $\because \triangle BDE \sim \triangle EFC$ ,  $\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{EF}{FC}$ ,

$$\therefore BD \cdot FC = DE \cdot EF = 1,$$

$$\therefore BC^2 = BD^2 + FC^2 + 2(BD + FC) + 2 \geq 2BD \cdot FC + 4\sqrt{BD \cdot FC} + 2 = 8,$$

$$\therefore BC \geq 2\sqrt{2},$$

当且仅当  $BD = FC$  时等号成立, 此时  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$  的最大值是  $1 + \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

10. 已知是不为 0 的实数, 求解方程组:

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = a & (1) \\ xy - \frac{y}{x} = \frac{1}{a} & (2) \end{cases}$$

**分析:** 可考虑两式相减, 得:  $\frac{y-x}{x} - \frac{x}{y} = a - \frac{1}{a}$ ,  $\therefore \frac{y^2 - x^2}{xy} = a - \frac{1}{a}$  似乎越走越远.

可考虑两式直接相乘, 仍然得不到有益结果. 将两式化成如下形式:

$$\begin{cases} xy - a = \frac{x}{y} & (3) \\ xy - \frac{1}{a} = \frac{y}{x} & (4) \end{cases}$$

再将两式相乘, 得  $x^2y^2 - xy(a + \frac{1}{a}) + 1 = 1$ , 注意到  $xy \neq 0$ ,

立即可得:  $xy = a + \frac{1}{a}$ , 代入 (1) 得:  $\frac{x}{y} = \frac{1}{a}$ ,  $\therefore$  这是很漂亮的结果!

乘胜前进:

$$\text{由 } \begin{cases} xy = a + \frac{1}{a} \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{a} \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \\ y = \sqrt{a^2 + 1} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \\ y = -\sqrt{a^2 + 1} \end{cases}.$$

11. 已知  $n > 1$ ,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  为整数且  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 2013$ , 求  $n$  的最小值.

**分析:** 既然  $n > 1$  且  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  为整数, 那么我们就从  $n = 2, 3, 4$  试起, 没有发现适合的. 当  $n = 5$  时, 取  $a_1 = a_2 = -1, a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2013$ ,

$$\text{则有 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -1 + (-1) + 1 + 1 + 2013 = 2013,$$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = (-1) \times (-1) \times 1 \times 1 \times 2013 = 2013,$$

以下证明  $n \leq 4$  时没有符合条件的. 不妨设  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ ,

分两种情况:

(1) 当  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  均为正整数时:

由  $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = 2013$  知,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  均为 2013 的正约数, 注意到  $2013 = 3 \times 11 \times 61$ , 欲  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 2013$  且  $n \leq 4$ , 则  $a_n \geq 671$ , 所以  $a_n = 671$  或 2013, 经验算,  $n = 2, 3, 4$  均不可能;

(2) 当  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  中有负整数时:

由  $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 2013$  且  $n \leq 4$  可知, 其中有且只有两个负数, 即  $a_1 \leq a_2 < 0$ .

若  $n=4$  时, 且  $a_4 = 2013$ , 则  $2013 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_2 + a_3 + 2013$ , 所以  $a_3 = -(a_1 + a_2)$

这时 2013 的正约数  $a_3$  是另外两个负约数的和的绝对值, 经检验是不可能的;

若  $n=4$ , 且  $a_4 < 2013$ , 即  $0 < a_4 \leq 671$ , 则无法使得  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2013$  成立;

若  $n=3$ , 则由  $a_1 \leq a_2 < 0$  和  $a_1 + a_2 + a_3 = 2013$  知,  $a_3 \geq 2013$ , 这时 2013 的正约数  $a_3$  是另外两个负约数的和的绝对值, 经检验是不可能的;

若  $n=2$ , 由  $a_1 \leq a_2 < 0$  知  $a_1 + a_2 \leq 0 < 2013$ , 也是不合要求的.

综上所述,  $n$  的最小值为 5.

12. 已知正整数  $a, b, c, d$  满足  $a^2 = c(d+13)$ ,  $b^2 = c(d-13)$ , 求所有满足条件的  $d$  的值.

**分析:** 设  $(a, b) = \omega$ , 则  $a = \omega \cdot m$ ,  $b = \omega \cdot n$ , 所以  $(m, n) = 1$ ,

将题设两个等式相除, 得  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{d+13}{d-13}$ , 于是有  $\frac{m^2}{n^2} = \frac{d+13}{d-13}$ ,

$$\text{又设 } \begin{cases} d+13 = km^2 & (1) \\ d-13 = kn^2 & (2) \end{cases}$$

(1)-(2)得:  $k(m+n)(m-n) = 2 \times 13$ ,

由于  $m+n$  与  $m-n$  同奇偶, 若  $m+n$ 、 $m-n$  同为偶数, 则  $k(m+n)(m-n)$  是 4 的倍数, 不可能为 26, 所以  $m+n$ 、 $m-n$  同为奇数且  $k=2$ ,

因此  $m+n=13$ ,  $m-n=1$ , 得到  $m=7$ ,  $n=6$ ,

代入(1), 得  $d+13=2 \cdot 7^2$ , 所以  $d=85$ , 且为唯一解.