2014 年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2014)09-0029-03

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 若 $a+b=\sqrt{5}$,则

$\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}+3ab=($ $)$.

(A)5 (B)$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ (C)$2\sqrt{5}$ (D)$\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

2. 已知一个面积为 S 且边长为 1 的正六边形,其六条最短的对角线两两相交的交点构成一个面积为 A 的小正六边形的顶点. 则 $\dfrac{A}{S}=$( ).

(A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{3}$ (C)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 在数 29 998、29 999、30 000、30 001 中,可以表示为三个连续自然数两两乘积之和的是( ).

(A)30 001 (B)30 000

(C)29 999 (D)29 998

4. 已知 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在平面直角坐标系 xOy 的第一象限上图像的两点,满足 $y_1+y_2=\dfrac{7}{2}$, $x_2-x_1=\dfrac{5}{3}$. 则 $S_{\triangle AOB}=$( ).

(A)$2\dfrac{10}{11}$ (B)$2\dfrac{11}{12}$ (C)$2\dfrac{12}{13}$ (D)$2\dfrac{13}{14}$

5. 有 2 015 个整数,任取其中 2 014 个相加,其和恰可取到 1,2,…,2 014 这 2 014 个不同的整数值. 则这 2 015 个整数之和为( ).

(A)1 004 (B)1 005

(C)1 006 (D)1 008

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 在 1~10 000 的自然数中,既不是完全平方数也不是完全立方数的整数有______个.

2. $\dfrac{[\sqrt{2013}]+[\sqrt{2014}]+[\sqrt{2015}]+[\sqrt{2016}]}{[\sqrt{2014}]\times[\sqrt{2015}]}$ =______([x]表示不超过实数 x 的最大整数).

3. 在四边形 $ABCD$ 中,已知 $BC=8$, $CD=12$, $AD=10$, $\angle A=\angle B=60°$. 则 $AB=$______.

4. 已知 M 是连续的 15 个自然数 1,2,…,15 的最小公倍数. 若 M 的约数中恰被这 15 个自然数中的 14 个数整除,称其为 M 的“好数”. 则 M 的好数有______个.

5. 设由 1~8 的自然数写成的数列为 a_1, a_2, …, a_8. 则

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|+|a_5-a_6|+|a_6-a_7|+|a_7-a_8|+|a_8-a_1|$$

的最大值为______.

三、(10 分)已知

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=0.$

证明:a、b、c 三个数中至少有两个相等.

四、(15 分)在凸四边形 $ABCD$ 中,已知

$\angle BAC=30°$, $\angle ADC=150°$,且 $AB=DB$.

证明:AC 平分 $\angle BCD$.

五、(15 分)某校对参加数学竞赛的选手的准考证进行编号,最小号为 0001,最大号为 2014. 无论哪名选手站出来统计本校其他所有选手准考证号数的平均值时,发现所得的平均值均为整数. 问这所学校参加竞赛的选手最多有多少名?

参考答案

一、**1.** A.

$$\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}+3ab$$
$$=\frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+3ab$$
$$=(a^2-ab+b^2)+3ab$$
$$=(a+b)^2=5.$$

2. B.

如图 1 观察得出$\frac{A}{S}=\frac{1}{3}$.

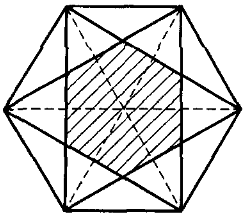

图 1

3. C.

注意到,三个连续自然数 $n-1$、n、$n+1$ 的两两乘积的和具有形式

$n(n-1)+n(n+1)+(n-1)(n+1)=3n^2-1$.

上式被 3 除余 2,而 30 001 和 29 998 被 3 除均余 1,30 000 被 3 整除. 则排除选项 A、B、D.

事实上,29 999 被 3 除余 2,且

$99\times100+100\times101+101\times99=29\ 999$.

4. B.

如图 2,添加辅助线,设 OB 与 AC 交于点 P.

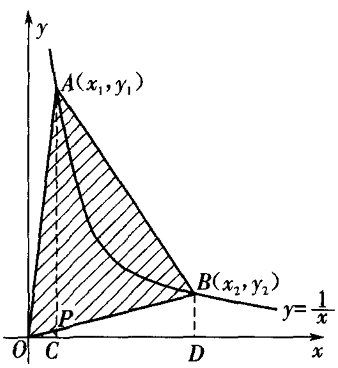

图 2

由 $x_1y_1=x_2y_2=1$

$\Rightarrow S_{\triangle AOC}=S_{\triangle BOD}$

$\Rightarrow S_{\triangle AOB}=S_{四边形AODB}-S_{\triangle BOD}$

$=S_{四边形AODB}-S_{\triangle AOC}=S_{梯形ACDB}$

$=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{3}=\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$.

5. D.

设 2 015 个整数为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2\,015}$,记

$x_1+x_2+\cdots+x_{2\,015}=M$.

不妨假设 $M-x_i=i\ (i=1,2,\cdots,2\,014)$,

$M-x_{2\,015}=A$.

则 $2\,014M=1+2+\cdots+2\,014+A$.

故 A 除以 2 014 的余数为 1 007.

从而,$A=1\,007$,$M=1\,008$.

当 $x_i=1\,008-i\ (i=1,2,\cdots,2\,014)$,$x_{2\,015}=1$ 时取到.

二、**1.** 9 883.

注意到,在 1 ~ 10 000 的自然数中,完全平方数共有 100 个.

因为 $22^3=10\,648>10\,000$,

$21^3=9\,261<10\,000$,

所以,完全立方数共有 21 个.

接下来考虑 1 ~ 10 000 的自然数中,既是完全平方数也是完全立方数(即完全六方数)的个数. 由于 $4^6=4\,096$,$5^6=15\,625$,因此,完全六方数共有 4 个.

由容斥原理,知在 1 ~ 10 000 的自然数中,既不是完全平方数也不是完全立方数的个数为

$10\,000-100-21+4=9\,883$.

2. $\frac{1}{11}$.

注意到,$44^2=1\,936<2\,013$,

$2\,016<2\,025=45^2$.

则$[\sqrt{2\,013}]=[\sqrt{2\,014}]=[\sqrt{2\,015}]$

$=[\sqrt{2\,016}]=44$.

故$\frac{[\sqrt{2\,013}]+[\sqrt{2\,014}]+[\sqrt{2\,015}]+[\sqrt{2\,016}]}{[\sqrt{2\,014}]\times[\sqrt{2\,015}]}$

$=\frac{44+44+44+44}{44\times44}=\frac{1}{11}$.

3. $9+\sqrt{141}$.

如图 3,延长 AD、BC 交于点 P.

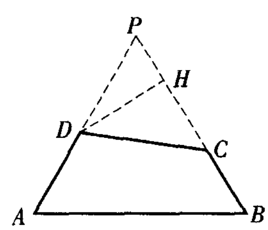

图 3

设 $AB=x$. 则

$DP=x-10$,

$PC=x-8$.

过点 D 作 $DH\perp PC$ 于点 H.

在 Rt△PHD、Rt△CHD 中,分别有

$DH^2=DP^2-PH^2, DH^2=CD^2-HC^2$

$\Rightarrow DP^2-PH^2=CD^2-HC^2$.

又 $PH=\frac{PD}{2}=\frac{x-10}{2}$,

$HC=PC-PH=\frac{x-6}{2}$,

则 $(x-10)^2-\left(\frac{x-10}{2}\right)^2=12^2-\left(\frac{x-6}{2}\right)^2$

$\Rightarrow AB=x=9+\sqrt{141}$.

4. 4.

易知, $M=2^3\times3^2\times5\times7\times11\times13$.

由于 2×11、2×13 均大于 15,因此,

$\frac{M}{11}=2^3\times3^2\times5\times7\times13$,

$\frac{M}{13}=2^3\times3^2\times5\times7\times11$,

每一个均为 M 的约数,且恰被其余 14 个数整除.

M 中 2 的次数减 1,则

$\frac{M}{2}=2^2\times3^2\times5\times7\times11\times13$

为 M 的约数,且恰被除去 8 以外的 14 个数整除.

同理,3 的次数减 1,则

$\frac{M}{3}=2^3\times3\times5\times7\times11\times13$

为 M 的约数,且恰被除去 9 以外的 14 个数整除;

而 M 中 5 的次数减 1,则 $\frac{M}{5}$ 为 M 的约数且恰被除去 5、10、15 以外的 12 个数整除;若去掉 7,则 $\frac{M}{7}$ 为 M 的约数且恰被除去 7、14 以外的 13 个数整除.

综上, M 的约数中恰能被这 15 个自然数中的 14 个整除的有四个,即 $\frac{M}{2}$、$\frac{M}{3}$、$\frac{M}{11}$、$\frac{M}{13}$.

5. 32.

由题意记

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|+|a_5-a_6|+|a_6-a_7|+|a_7-a_8|+|a_8-a_1|.$$

上式去掉绝对值符号,在这个和的任意加项中,得到一正、一负两个自然数,为了使和达到最大的可能值,只须由 1~4 取负,由 5~8 取正,于是,

$$S=2[(8+7+6+5)-(4+3+2+1)]=32.$$

如 $|8-4|+|4-7|+|7-1|+|1-5|+|5-2|+|2-6|+|6-3|+|3-8|=32$.

三、注意到,

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\&=(b-c)a^2+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b\\&=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\&=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]\\&=(b-c)(a-b)(a-c)=0.\end{aligned}$$

因此, $b-c$、$a-b$、$a-c$ 中至少有一个等于 0,即 a、b、c 三个数中至少有两个相等.

四、如图 4,作点 B 关于 AC 的对称点 E,联结 AE、BE、DE. 则 $\triangle ABE$ 为正三角形.

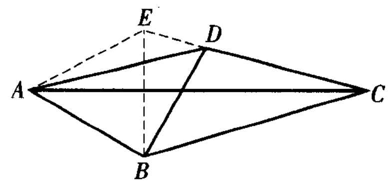

图 4

设 $\angle DBE=\theta$. 则 $\angle ABD=60°+\theta$.

因为 $AB=DB$,所以,

$\angle ADB=\frac{180°-(60°+\theta)}{2}=60°-\frac{\theta}{2}$.

在 $\triangle BED$ 中,因为 $BD=BE$,所以,

$\angle BDE=\frac{180°-\theta}{2}=90°-\frac{\theta}{2}$.

故 $\angle EDA=\angle BDE-\angle ADB$

$=\left(90°-\frac{\theta}{2}\right)-\left(60°-\frac{\theta}{2}\right)=30°$.

由 $\angle EDA+\angle ADC=30°+150°=180°$,知 E、D、C 三点共线.

由对称性知 $\angle ACE=\angle ACB$.

因此, AC 平分 $\angle BCD$.

五、设该校共有 n 名选手参赛,其准考证号依次为

$1=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=2\,014$.

依题意知

2014年全国高中数学联赛天津赛区预赛

中图分类号:G424.79　文献标识码:A　文章编号:1005-6416(2014)09-0032-04

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. 在平面直角坐标系中,方程

$$x^2+2x\sin xy+1=0$$

所表示的图形为(　　).

(A)直线　　(B)抛物线

(C)一个点　　(D)以上均不对

2. 已知圆柱的底面半径为 r,高为 h,体积为2,表面积为24.则$\frac{1}{r}+\frac{1}{h}=$(　　).

(A)6　(B)8　(C)12　(D)24

3. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,并且对任意正整数 n 均有 $S_{n+2}=4S_n+3$.则 $a_2=$(　　).

(A)2　(B)6　(C)2或6　(D)2或-6

4. 若关于 x 的不等式$\frac{4x}{a}+\frac{1}{x}\geqslant 4$ 在区间$[1,2]$上恒成立,则实数 a 的取值范围为(　　).

(A)$\left(0,\frac{4}{3}\right]$　　(B)$\left(1,\frac{4}{3}\right]$

(C)$\left[1,\frac{4}{3}\right]$　　(D)$\left[\frac{16}{7},\frac{4}{3}\right]$

5. 直线 l 在平面 α 上,直线 m 平行于平面 α,并与直线 l 异面.动点 P 在平面 α 上,且到直线 l、m 的距离相等.则点 P 的轨迹为(　　).

(A)直线　　(B)椭圆

(C)抛物线　　(D)双曲线

6. 在$\triangle ABC$中,若 $\tan A$、$\tan B$、$\tan C$ 均为整数,且$\angle A>\angle B>\angle C$,则以下选项错误的是(　　).

(A)$\angle A<80^\circ$　　(B)$\angle B<60^\circ$

(C)$\angle C<50^\circ$　　(D)$\angle A>65^\circ$

二、填空题(每小题9分,共54分)

1. 若正实数 a、b 满足

$$\log_8 a+\log_4 b^2=5,\ \log_8 b+\log_4 a^2=7,$$

则 $\log_4 a+\log_8 b=$______.

2. 设 $x=\sin^2\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $\alpha=\frac{67\pi}{2\,014}$时,$x$ 的小数点后第一位数字为______.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n\geqslant 2).$$

若 $a_7=8$,则 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$______.

$$S_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n-x_k}{n-1}\ (k=1,2,\cdots,n)\in\mathbf{Z}_+.$$

对任意 i、$j(1\leqslant i<j\leqslant n)$均有

$$S_i-S_j=\frac{x_j-x_i}{n-1}\in\mathbf{Z}_+.$$

于是,$x_j-x_i\geqslant n-1$.

故 x_n-x_1

$$=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)$$

$$\geqslant(n-1)^2$$

$$\Rightarrow(n-1)^2\leqslant x_n-x_1=2\,013\Rightarrow n\leqslant 45.$$

由于$\frac{2\,014-1}{n-1}$为整数,从而,$n-1$为2 013的约数.

注意到,$2\,013=3\times11\times61$ 不超过45的最大约数为33.于是,n 的最大值为34,即参赛选手最多有34名.

这样的34名选手的号码是可以实现的.如 $x_i=33i-32\ (i=1,2,\cdots,33)$,$x_{34}=2\,014$.

因此,该校参加竞赛的选手最多有34名.

(李延林　提供)