2001 年北京市中学生数学竞赛
初二年级复赛

(2001-04-15)

一、填空题(满分 40 分,每小题 8 分)

1. 已知有理数 x 满足方程 $\frac{1}{2\,001-\frac{x}{x-1}}=\frac{1}{2\,001}$.

则 $\frac{x^3-2\,001}{x^4+29}=$ ______.

2. 如图 1,正方形 $ABCD$ 的面积是 64 平方厘米,正方形 $CEFG$ 的面积是 36 平方厘米,DF 与 BG 相交于点 O. 则 $\triangle DBO$ 的面积等于 ______ 平方厘米.

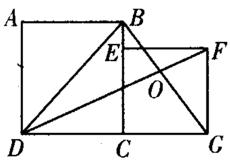

图 1

3. 已知 $a^2+b^2=6ab$ 且 $a>b>0$. 则 $\frac{a+b}{a-b}=$ ______.

4. 化简表达式

$$\left(6+\frac{a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17\,160}}}{\left|a-\sqrt[3]{131+a^3-\sqrt{17\,160}}\right|}\right)^4,$$

所得的结果等于 ______.

5. 在边长为 1 厘米的正 $\triangle ABC$ 中,P_0 为 BC 边上一点,作 $P_0P_1\perp CA$ 于点 P_1,作 $P_1P_2\perp AB$ 于点 P_2,作 $P_2P_3\perp BC$ 于点 P_3. 如果点 P_3 恰与点 P_0 重合,则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是 ______ 平方厘米.

二、(满分 15 分)证明恒等式:

$$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2.$$

三、(15 分)在六张纸片的正面分别写上整数 1、2、3、4、5、6,打乱次序后,将纸片翻过来,在它们的反面也随意分别写上 1～6 这六个整数,然后计算每张纸片正面与反面所写数字之差的绝对值,得出六个数. 请你证明:所得的六个数中至少有两个是相同的.

四、(15 分)如图 2,在等腰 $\triangle ABC$ 中,延长边 AB 到点 D,延长边 CA 到点 E,连结 DE,恰有 $AD=BC=CE=DE$. 求证:$\angle BAC=100°$.

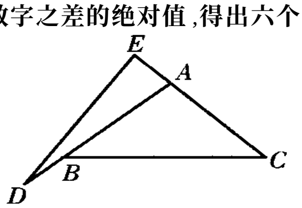

图 2

五、(15 分)1 与 0 交替排列,组成下面形式的一串数

101,10 101,1 010 101,101 010 101,⋯

请你回答,在这串数中有多少个质数?并请证明你的论断.

参 考 答 案

一、1. -69 2. $24\frac{8}{37}$ 3. $\sqrt{2}$ 4. 625 5. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

二、$a^4+b^4+(a+b)^4-2(a^2+ab+b^2)^2$

$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+(a^2+2ab+b^2)^2-2(a^2+ab+b^2)^2$

$=[(a^2+b^2)^2-(a^2+ab+b^2)^2]+[(a^2+2ab+b^2)^2-(a^2+ab+b^2)^2]-2a^2b^2$

$=(2a^2+2b^2+ab)(-ab)+(2a^2+3ab+2b^2)\cdot ab-2a^2b^2$

$=ab(-2a^2-2b^2-ab+2a^2+3ab+2b^2-2ab)$

$=0.$

三、设六张卡片正面写的数是

a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6;

反面写的数对应为 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5、b_6.

(a_i,b_i 分别取值为 1,2,3,4,5,6. $i=1,2,3,4,5,6$.)

则这六张卡片正面写的数与反面写的数的绝对值分别为

$|a_1-b_1|$、$|a_2-b_2|$、$|a_3-b_3|$、

$|a_4-b_4|$、$|a_5-b_5|$、$|a_6-b_6|$.

设这六个数两两都不相等,则它们只能取 0、1、2、3、4、5 这六个值. 于是,

$$\sum_{i=1}^{6}|a_i-b_i|=0+1+2+3+4+5=15 \qquad (1)$$

是个奇数.

另一方面,$|a_i-b_i|$ 与 a_i-b_i ($i=1,2,3,4,5,6$) 的奇偶性相同,所以,

$$\sum_{i=1}^{6}|a_i-b_i|$$

与

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{6}(a_i-b_i)\\&=(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)\\&\quad-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5+b_6)\\&=(1+2+3+4+5+6)-(1+2+3+4+5+6)\\&=0\end{aligned}$$

的奇偶性相同,是个偶数,与式(1)矛盾.

故 $|a_1-b_1|$、$|a_2-b_2|$、$|a_3-b_3|$、$|a_4-b_4|$、$|a_5-b_5|$、$|a_6-b_6|$ 这六个数中至少有两个是相同的.

四、易知 $\triangle ADE$ 为等腰三角形,其底角 $\angle EAD$ 必为锐角,所以等腰 $\triangle ABC$ 中,$\angle BAC$ 为钝角,必是顶角,则 AB、AC 是腰,有 $AB=AC$.

如图 3,过 C 作 AD 的平行线 CF,与过 D 所作 BC 的平行线交于点 F,连结 EF,易知 $BCFD$ 为平行四边形.因此,$DB=CF$,$BC=DF$,$\angle EAD=\angle ECF$.

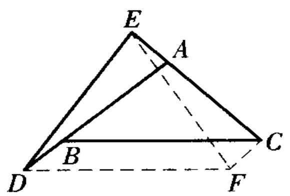

图 3

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CEF$ 中,

$AD=CE$,$AE=DB=CF$,$\angle EAD=\angle ECF$,

则 $\triangle ADE \backsim \triangle CEF$,有 $ED=EF$.

但 $ED=BC=DF$,$\triangle DEF$ 是等边三角形,那么,$\angle EDF=60°$.

设 $\angle BAC=\alpha$,则

$$\angle ADF=\angle ABC=\frac{180°-\alpha}{2},\ \angle DAE=180°-\alpha,$$

$$\begin{aligned}\angle ADE&=180°-2\angle DAE=180°-2(180°-\alpha)\\&=2\alpha-180°.\end{aligned}$$

由 $\angle ADF+\angle ADE=\angle EDF=60°$,得

$$\frac{180°-\alpha}{2}+(2\alpha-180°)=60°.$$

解得 $\alpha=100°$,

即 $\angle BAC=100°$.

五、很明显,101 是个质数.

下面证明,$N=\underbrace{101010\cdots01}_{k个1}$($k\geq3$)都是合数(中间有 $k-1$ 个 0).

$$\begin{aligned}11N&=11\times\underbrace{10101\cdots01}_{k个1}\\&=\underbrace{1111\cdots11}_{2k个1}=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times(10^k+1).\end{aligned}$$

(1) 当 k 为不小于 3 的奇数时,根据被 11 整除的判别法可知 11 不整除 $\underbrace{11\cdots11}_{k个1}$,所以,$11|(10^k+1)$,即

$$\frac{10^k+1}{11}=M_1>1.$$

故 $N=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times\left(\frac{10^k+1}{11}\right)=\underbrace{11\cdots11}_{k个1}\times M_1$.

则 N 是个合数.

(2) 当 k 为不小于 3 的偶数时,易知 $11|\underbrace{11\cdots11}_{k个1}$.

即

$$\frac{\overbrace{11\cdots11}^{k个1}}{11}=M_2>1.$$

故 $N=\frac{\overbrace{11\cdots11}^{k个1}}{11}\times(10^k+1)=M_2(10^k+1)$.

则 N 是个合数.

综上,当 $k\geq3$ 时,$N=\underbrace{10101\cdots01}_{k个1}$ 必为合数.

所以,在 101,10 101,1 010 101,101 010 101,……中,只有 101 是质数.

(首都师范大学 周春荔 提供)