2003年北京市中学生数学竞赛(初二复赛)

一、填空题(每小题8分,共40分)

1.若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,则$a_2+a_4=$______.

2.在$\triangle ABC$中,M是边AC的中点,P为AM上一点,过P作$PK//AB$交BM于X,交BC于K.若$PX=2$,$XK=3$,则$AB=$______.

3.$a、b、c$是非负实数,并且满足$3a+2b+c=5$,$2a+b-3c=1$.设$m=3a+b-7c$,记x为m的最小值,y为m的最大值.则$xy=$______.

4.在$\triangle ABC$中,AD是边BC上的中线,$AB=\sqrt{2}$,$AD=\sqrt{6}$,$AC=\sqrt{26}$.则$\angle ABC=$______.

5.已知$xyz=1$,$x+y+z=2$,$x^2+y^2+z^2=16$.则$\frac{1}{xy+2z}+\frac{1}{yz+2x}+\frac{1}{zx+2y}=$______.

二、(15分)若正数$a、b、c$满足$a+c=2b$,求证:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.$$

三、(15分)一个直角三角形的边长都是整数,它的面积和周长的数值相等.试确定这个直角三角形三边的长.

四、(15分)如图1,以$\triangle ABC$的三边为边分别向形外作正方形$ABDE$、$CAFG$、$BCHK$.连结EF、GH、KD.求证:以EF、GH、KD为边可以构成一个三角形,并且所构成的三角形的面积等于$\triangle ABC$面积的3倍.

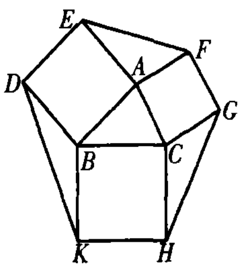

图1

五、(15分)13位运动员,他们着装的运动服号码分别是1~13号.问:这13名运动员能否站成一个圆圈,使得任意相邻的两名运动员号码数之差的绝对值都不小于3且不大于5?如果能,试举一例;如果不能,请说明理由.

参考答案

一、1.-120.

令$x=0$,得$a_0=-1$.

令$x=1$,得$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$;

令$x=-1$,得

$-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243$.

后面两式相加得$a_4+a_2+a_0=-121$.

因此,$a_2+a_4=-120$.

2.8.

如图2,以BC为对角线作$\square ABDC$,延长PK交BD于Q,过M作AB的平行线交BC于O,交BD于N.则$AB=PQ=MN$.易知$CO=BO$,点O是$\square ABDC$的中心.因此,$MO=ON$.于是,

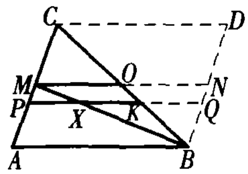

图2

$KQ=XK=3$.

所以,$AB=PX+XK+KQ=2+3+3=8$.

3.$\frac{5}{77}$.

由$3a+2b+c=5$,$2a+b-3c=1$得

$$\begin{cases}3a+2b=5-c,\\2a+b=1+3c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2b=5-c,\\4a+2b=2+6c.\end{cases}$$

所以,$a=7c-3$,$b=7-11c$.

由$a、b、c$是非负实数,得

$$\begin{cases}7c-3\geqslant0,\\7-11c\geqslant0,\\c\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{7}\leqslant c\leqslant\frac{7}{11}.$$

又$m=3a+b-7c=3c-2$,故

$$-\frac{5}{7}\leqslant m\leqslant-\frac{1}{11}.$$

于是,$x=-\frac{5}{7}$,$y=-\frac{1}{11}$.因此,$xy=\frac{5}{77}$.

4.60°.

如图3,延长BA到E,使得$AE=AB=\sqrt{2}$,即$BE=2\sqrt{2}$.连结CE,则$CE//AD$,且

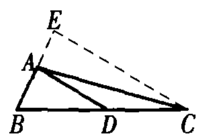

图3

$CE=2AD=2\sqrt{6}$.

在$\triangle ACE$中,有$AE^2+CE^2=2+24=26=AC^2$.

故$\angle AEC=90^{\circ}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle BCE$中,$CE=\sqrt{3}BE$,故$\angle ABC=60^{\circ}$.

5.$-\frac{4}{13}$.

因为$x+y+z=2$,两边平方得

$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=4$.

已知$x^2+y^2+z^2=16$,所以,$xy+yz+zx=-6$.

又$z=2-x-y$,所以,

$$\frac{1}{xy+2z}=\frac{1}{xy+4-2x-2y}=\frac{1}{(x-2)(y-2)}.$$

同理，$\frac{1}{yz+2x}=\frac{1}{(y-2)(z-2)}$，

$$\frac{1}{zx+2y}=\frac{1}{(z-2)(x-2)}.$$

故$\frac{1}{xy+2z}+\frac{1}{yz+2x}+\frac{1}{zx+2y}$

$$=\frac{1}{(x-2)(y-2)}+\frac{1}{(y-2)(z-2)}+\frac{1}{(z-2)(x-2)}$$

$$=\frac{(z-2)+(x-2)+(y-2)}{(x-2)(y-2)(z-2)}$$

$$=\frac{x+y+z-6}{xyz-2(xy+yz+zx)+4(x+y+z)-8}$$

$$=\frac{2-6}{1+12+8-8}=-\frac{4}{13}.$$

二、由已知易得 $a-b=b-c$.

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

$$=\frac{b-c}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}.$$

同理，$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$$=\frac{a-b}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}.$$

所以，$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

故$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

三、设 a、b 分别为两条直角边长，则斜边长 $c=\sqrt{a^2+b^2}$. 由于 a、b、c 均为正整数，所以，$a\neq b$. 不妨设 $a>b$. 依题意有

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=\frac{ab}{2}.$$

两边平方并整理得$\frac{a^2b^2}{4}-a^2b-ab^2+2ab=0$，

即 $ab-4a-4a+8=0$.

从而，$(a-4)(b-4)=8=1\times8=2\times4$.

由于 a、b 为正整数，$a>b$，则

$$\begin{cases}a-4=8,\\b-4=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}a-4=4,\\b-4=2.\end{cases}$$

解得 $a=12,b=5,c=13$；$a=8,b=6,c=10$.

所以，这个直角三角形三边的长为(12,5,13)或(8,6,10).

四、如图4，过 D 作 $DP \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} KH$，则四边形 $DPHK$ 是平行四边形.

所以，$PH \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DK$.

因为 $DP \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BC$，则四边形 $DPCB$ 也是平行四边形. 因此，$PC \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DB$. 又 $EA \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} DB$，所以，$EA \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} PC$，则四边形 $EACP$ 也是平行四边形. 所以，$EP \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} AC$. 从而，$EP \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} FG$. 因此，四边形 $EFGP$ 也是平行四边形. 故 $PG \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} EF$.

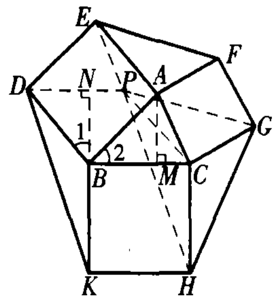

图4

由此可见，对于 $\triangle PHG$，$PH=DK$，$PG=EF$，$GH=GH$，这表明以 EF、GH、KD 为边可以构成一个三角形.

由此知，在$\triangle PCG$与$\triangle EAF$中，$PC=EA$，$CG=AF$，$PG=EF$，所以，$\triangle PCG\cong\triangle EAF$.

同理，$\triangle PCH\cong\triangle DBK$.

因此，$S_{\triangle PHG}=S_{\triangle PCH}+S_{\triangle PCG}+S_{\triangle CGH}$

$=S_{\triangle DBK}+S_{\triangle EAF}+S_{\triangle CGH}$.

过 A 作 $AM\perp BC$ 于 M，延长 KB 交 DP 于 N，则 $BN\perp DP$. 易知$\angle1=\angle2$.

在 Rt$\triangle BND$ 与 Rt$\triangle BMA$ 中，因为

$BD=BA$，$\angle1=\angle2$，

所以，Rt$\triangle BND\cong$Rt$\triangle BMA$. 因此，$DN=AM$.

故 $S_{\triangle DBK}=\frac{1}{2}KB\times DN=\frac{1}{2}BC\times AM=S_{\triangle ABC}$.

同理，$S_{\triangle EAF}=S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CGH}=S_{\triangle ABC}$.

因此，$S_{\triangle PHG}=S_{\triangle DBK}+S_{\triangle EAF}+S_{\triangle CGH}=3S_{\triangle ABC}$.

五、不能办到. 理由如下：

假设能够排成一个圆圈，使得号码满足题设要求. 我们将号码数分为 A、B 两组：

$A=\{1,2,3,11,12,13\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$.

显然，A 组中的任两个数的差要么小于3，要么大于5，所以，在排成的圆圈中 A 组中的任两个数都不能相邻. 也就是说，A 组中的任两个数之间至少都要插放一个 B 组中的数. 但 A 组中有6个间隔，B 组中有7个数，所以，排好后有且只有一个间隔插放了 B 组中的两个数.

我们将 B 组中每个数能与 A 组中的数之差的绝对值不小于3，且不大于5的配成可相邻放置的一对，则有

(4,1)；(5,1)，(5,2)；(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,11)；

(7,2)，(7,3)，(7,11)，(7,12)；

(8,3)，(8,11)，(8,12)，(8,13)；

(9,12)，(9,13)；(10,13).

可见，B 组中的数5,6,7,8,9都能与 A 组中的两个不同的数相邻放置，4只与1配对，10只与13配对，因此，排成圆圈后，4和10都不能单独插在 A 组中的两个不同数之间，即4和10只能作为相邻的两个数插在 A 组中的两个不同数之间. 也就是4与10相邻，此时 $10-4=6>5$，与题设条件矛盾. 因此，题设要求的排法不能办到.

（周春荔　整理）