

**竞赛之窗**

**2014 年北京市中学生数学竞赛预赛(高一)**

中国分类号:G424.79 文献标识码:A 文章编号:1005-6416(2014)08-0022-03

一、选择题(每小题6分,共36分)

1. 设  $P$  是素数集合,  $H$  是合数集合. 定义

$$I(n) = \begin{cases} 1, & n \in P; \\ 0, & n \in H. \end{cases}$$

下面三个命题:

- ①对任意  $x, y \in P$ , 均有  $I(x+y) = 0$ ;
- ②对任意  $x, y \in H$ , 均有  $I(x+y) = 0$ ;
- ③对  $x \in P, y \in H$ , 均有  $I(x+y) = 0$

中,真命题有( )个.

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)3

2. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y = \frac{1}{2x}$  图像上的动点  $P$  与坐标原点  $O$  的距离的最小值为( ).

- (A)  $\frac{1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (C)1 (D)  $\sqrt{2}$

3. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = AC, D$  是  $AC$  上一点, 且  $AD = BD = BC$ . 则  $\cos \angle BAC =$  ( ).

- (A)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  (B)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$   
(C)  $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$  (D)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

4. 一串数

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

的构成规律是: 第一个数和第二个数均是 1, 从第三个数起, 每一个数均等于其前面紧邻的两个数之和. 则这串数中的第 2 014 个数被 7 除的余数为( ).

- (A)0 (B)2 (C)4 (D)6

5. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$ . 若对任意实数  $x, y$ , 均满足方程

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy,$$

则  $f(201) =$  ( ).

- (A)40 400 (B)40 401

- (C)40 402 (D)40 403

6. 已知函数  $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}$ . 则  $f(x)$  的值域为( ).

- (A)  $[-1, \frac{5}{3}]$  (B)  $[-\frac{1}{3}, 5]$   
(C)  $[-\frac{5}{3}, 1]$  (D)  $[-5, \frac{1}{3}]$

二、填空题(每小题8分,共64分)

1. 下面是我国著名数学家王元院士的题词:

**数学竞赛好**

若不同的汉字代表  $0 \sim 9$  中的不同数字, 假设“数学竞赛好”表示的是不同数字组成的五位数中最大的平方数. 则此五位数为\_\_\_\_\_.

2. 若实数  $x$  满足  $\log_2 \log_2 x = \log_4 \log_4 x$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.

3. 如图 1, 已知正方形  $ABCD$  的边长为 5,  $E, F$  为正方形外的两点,  $BE = DF = 4, AE = CF = 3$ . 则  $EF =$ \_\_\_\_\_.

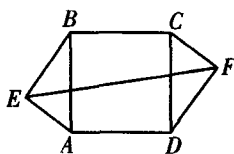


图 1

4. 试确定不超过  $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$  的最大整数为\_\_\_\_\_.

5. 如图 2, 在四边形  $ABCD$  中, 已知  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ, AC$  与  $BD$  交于点  $E, AC = BC, AD = 4, BD = 7$ . 则  $S_{\triangle AEB} =$ \_\_\_\_\_.

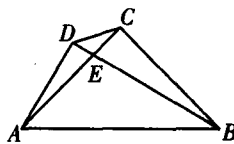


图 2

6. 在立方体的每个面上各写一个正整数, 在每个顶点处写该顶点所在的三个面上的正整数的乘积. 若八个顶点写的数之和为 2 014, 则六个面

上写的数之和为\_\_\_\_\_.

7. 已知  $A, B$  为集合  $\{0, 1, \dots, 9\}$  中的数字,  $r$  为两位整数  $\overline{AB}$ ,  $s$  为两位整数  $\overline{BA}$ ,  $r, s \in \{00, 01, \dots, 99\}$ . 当  $|r - s| = k^2$  ( $k$  为整数) 时, 有序数对  $(A, B)$  的个数为\_\_\_\_\_.

8. 已知  $P$  是边长为  $6\sqrt{3}$  的正  $\triangle ABC$  的内切圆上的一个动点. 则  $BP + \frac{1}{2}PC$  的最小值为\_\_\_\_\_.

## 参考答案

一、1. A.

若  $x=2, y=5$ , 得  $x+y=7$ , 则

$$I(x+y) = I(7) = 1 \neq 0,$$

故命题①不真;

若  $x=4, y=9$ , 得  $x+y=13$ , 则

$$I(x+y) = I(13) = 1 \neq 0,$$

故命题②不真;

若  $x=3, y=8$ , 得  $x+y=11$ , 则

$$I(x+y) = I(11) = 1 \neq 0,$$

故命题③不真.

综上, 真命题有 0 个.

2. C.

根据对称性, 只需考虑  $x > 0$  的情形即可.

设动点为  $P(x, y)$ . 则  $xy = \frac{1}{2}$ .

又  $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (x - y)^2 + 1$ , 于

是, 当  $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时,  $x^2 + y^2$  取得最小值 1, 此时,  $OP$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$  的最小值为 1.

3. C.

如图 3, 设  $AB = AC = 1$ ,

$AD = BD = BC = a$ . 则

$$CD = 1 - a.$$

易知,

$$\triangle ABC \sim \triangle BCD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 - a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (负值舍去).}$$

作  $BH \perp CD$  于点  $H$ . 则

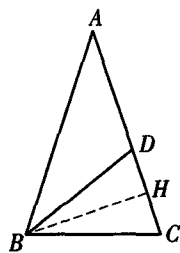


图 3

$$CH = DH = \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{又 } AH = 1 - CH = 1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \text{ 故}$$

$$\cos \angle BAC = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

4. D.

设这串数为  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , 其构成规律为

$$a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3).$$

考虑这些数被 7 除的余数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, \dots$$

观察余数列第 17 个数和第 18 个数分别与第 1 个数和第 2 个数相同, 循环出现.

注意到,  $2014 = 125 \times 16 + 14$ .

从而, 所求结果为 6.

5. B.

在题给方程中令  $x = y$ , 得

$$f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + \frac{a}{2}(f(0) = a).$$

再取  $x = y = 0$ , 得

$$a = 2a \Rightarrow a = 0.$$

经检验,  $f(x) = x^2$  满足方程.

因此,  $f(201) = 40401$ .

6. B.

注意到,  $x^2 - x + 1 > 0$ .

于是,  $f(x)$  的定义域为全体实数.

记  $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 1}$ . 则

$$y(x^2 - x + 1) = x^2 + 3x + 1$$

$$\Rightarrow (y-1)x^2 - (y+3)x + (y-1) = 0.$$

若二次项系数  $y-1=0$ , 则  $x=0$ .

若二次项系数  $y-1 \neq 0$ , 则

$$\Delta = (y+3)^2 - 4(y-1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 14y - 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{3}, 5\right].$$

所以,  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{1}{3}, 5\right]$ .

二、1. 96 721.

注意到,  $300^2 = 90\,000$ ,  $310^2 = 96\,100$ ,

$$320^2 = 102\,400 > 100\,000.$$

于是, 这个不同数字的五位数可能在  $310^2 \sim 320^2$  之间的九个平方数中.

又  $311^2 = 96\ 721$ ,  $312^2 = 97\ 344$ ,  $313^2 = 97\ 969$ ,  
 $314^2 = 98\ 596$ ,  $315^2 = 99\ 225$ ,  $316^2 = 99\ 856$ ,  
 $317^2 = 100\ 489 > 100\ 000$ ,

故不同数字的五位数中最大的平方数为 96 721.

2.  $\sqrt{2}$ .

设  $y = \log_a \log_a x$ . 则  $a^{a^y} = x$ .

令  $a = 2$  和  $a = 4$ . 由题意知

$$2^{2^y} = 4^{4^y} = (2^2)^{(2^2)^y} = 2^{2^{2y+1}}$$

$$\Rightarrow y = 2y + 1 \Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

3.  $7\sqrt{2}$ .

易知,  $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ .

延长  $EA, FD$  交于点  $G$ .

由  $\angle ADG = 90^\circ - \angle CDF = \angle DCF = \angle BAE$ ,

$\angle DAG = 90^\circ - \angle BAE = \angle ABE$ ,

知  $\triangle AGD \cong \triangle BEA$ .

于是,  $EG = FG = 7$ .

从而,  $EF = 7\sqrt{2}$ .

4. 3.

注意到,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{14} + 2}{\sqrt{14} - 2} &= \frac{(\sqrt{14} + 2)^2}{(\sqrt{14} - 2)(\sqrt{14} + 2)} \\ &= \frac{14 + 4 + 4\sqrt{14}}{14 - 4} = \frac{18 + 4\sqrt{14}}{10}. \end{aligned}$$

而  $3 < \sqrt{14} < 4$ , 于是,  $30 < 18 + 4\sqrt{14} < 34$ .

从而,  $3 < \frac{18 + 4\sqrt{14}}{10} < 3.4$ .

因此, 不超过  $\frac{\sqrt{14} + 2}{\sqrt{14} - 2}$  的最大整数为 3.

5.  $11\frac{9}{11}$ .

由题意知  $A, B, C, D$  四点共圆, 且

$\angle CBD = \angle CAD$ ,

$\triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $\angle CBA = 45^\circ$ .

以  $C$  为中心旋转  $\triangle BCD$ , 使点  $B$  与  $A$  重合, 则  $BD$  落在  $AD$  上, 得  $\triangle ACF$ .

于是,  $AF = 7, DF = 7 - 4 = 3$ ,

$\angle FDC = \angle ABC = 45^\circ$ .

过点  $C$  作  $CH \perp DF$  于点  $H$ . 则

$$CH = \frac{1}{2}DF = \frac{3}{2}.$$

从而,  $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$ .

而  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \times (4^2 + 7^2) = \frac{65}{4}$ , 故

$$\frac{DE}{EB} = \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{\frac{65}{4}} = \frac{12}{65} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{DB}{EB} = \frac{77}{65}.$$

又  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14$ , 于是,

$$S_{\triangle ABE} = \frac{14 \times 65}{77} = \frac{910}{77} = 11\frac{9}{11}.$$

6. 74.

如图 4, 设在立方体相对的两个面上写的正整数对分别为  $(a, b), (c, d), (e, f)$ .

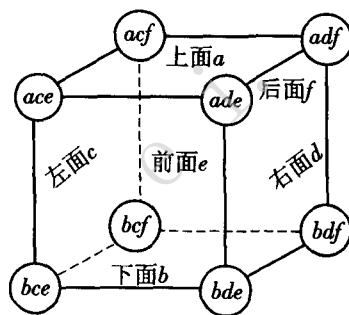


图 4

则在各顶点处写的数之和为

$$\begin{aligned} &acf + adf + ace + ade + bcf + bce + bdf + bde \\ &= (a+b)(c+d)(e+f) \\ &= 2\ 014 = 2 \times 19 \times 53. \end{aligned}$$

从而, 在各面上写的数之和为

$$\begin{aligned} &(a+b) + (c+d) + (e+f) \\ &= 2 + 19 + 53 = 74. \end{aligned}$$

7. 42.

注意到,

$$|(10A+B) - (10B+A)| = 9|A-B| = k^2.$$

则  $|A-B|$  为完全平方数.

当  $|A-B| = 0$  时, 有 10 个整数对:

$$(A, B) = (0, 0), (1, 1), \dots, (9, 9);$$

当  $|A-B| = 1$  时, 有 18 个整数对:

$$(A, B) = (0, 1), (1, 2), \dots, (8, 9),$$

及它们的逆序数;

当  $|A-B| = 4$  时, 有 12 个整数对:

$$(A, B) = (0, 4), (1, 5), \dots, (5, 9),$$

及它们的逆序数;

当  $|A-B| = 9$  时, 有 2 个整数对:

$$(A, B) = (0, 9),$$

及其逆序数.

# 2014 年全国高中数学联赛四川赛区预赛

中图分类号: G424.79    文献标识码: A    文章编号: 1005-6416(2014)08-0025-05

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 复数  $z = a + 4i$ , 且  $\frac{z}{z+b} = 4i$ .

则  $b =$  ( ).

- (A) -16    (B) 1    (C) 16    (D) 17

2. 过椭圆的左焦点  $F$  作倾斜角为  $45^\circ$  的直线  $l$  与该椭圆交于  $A, B$  两点. 若  $|BF| = 2|AF|$ , 则该椭圆的离心率为( ).

- (A)  $\frac{1}{3}$     (B)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$     (C)  $\frac{1}{2}$     (D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知公差为  $d$  的等差数列  $\{a_n\}$  满足  $d > 0$ , 且  $a_2$  是  $a_1, a_4$  的等比中项. 记  $b_n = a_{2^n} (n \in \mathbf{Z}_+)$ , 对任意的正整数  $n$  均有

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} < 2.$$

则公差  $d$  的取值范围是( ).

- (A)  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$     (B)  $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- (C)  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$     (D)  $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

4. 已知  $a, b$  为正实数, 记

$$P = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}, Q = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab},$$

$$R = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}.$$

则下列判断正确的是( ).

- (A)  $P \geq Q \geq R$     (B)  $Q \geq P \geq R$

- (C)  $Q \geq R \geq P$

- (D)  $P, Q, R$  的大小关系不能确定

5. 已知一个半径为 6 的球. 则该球内接正三棱锥的体积的最大值为( ).

从而, 满足条件的有序数对个数为  $10 + 18 + 12 + 2 = 42$ .

8.  $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ .

如图 5, 设  $\triangle ABC$  内切圆为  $\odot O$ , 取  $OC$  上的点  $M$ , 使  $OM = \frac{1}{4}OC$ .

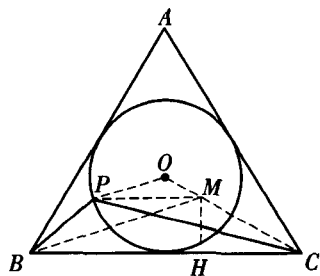


图 5

由正  $\triangle ABC$  的边长为  $6\sqrt{3}$ , 知

$$OC = 6, OP = 3, OM = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \triangle OPM \sim \triangle OCP$$

$$\Rightarrow \frac{PM}{PC} = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{2} \Rightarrow PM = \frac{1}{2}PC.$$

注意到,  $PB + \frac{1}{2}PC = PB + PM \geq BM$ .

过点  $M$  作  $MH \perp BC$  于点  $H$ . 则

$$MH = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}(OC - OM) = \frac{9}{4},$$

$$BH = BC - CH = 6\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{故 } BM = \sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{756}}{4} = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{因此, } BP + \frac{1}{2}PC = PB + PM \geq BM = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

当动点  $P$  为  $BM$  与内切圆的交点时, 得到最小值  $\frac{3\sqrt{21}}{2}$ .

(李廷林 提供)