竞赛之窗

2008年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题5分,共25分)

1.自然数 a、b、c、d 满足

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1.$$

则 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^5}+\frac{1}{d^6}$ 的值为(　　).

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{3}{16}$　(C)$\frac{7}{32}$　(D)$\frac{15}{64}$

2.如图1,四边形 $ABCD$ 是一张长方形纸片,将 AD、BC 折起,使 A、B 两点重合于边 CD 上的点 P,然后压平得折痕 EF 与 GH.若 $PE=8$ cm, $PG=6$ cm, $EG=10$ cm,则长方形纸片 $ABCD$ 的面积为(　　)cm^2.

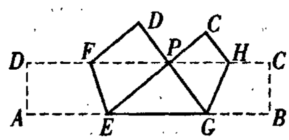

图1

(A)105.6　　(B)110.4

(C)115.2　　(D)124.8

3.化简 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 的结果是(　　).

(A)1　(B)$\sqrt{3}$　(C)2　(D)4

4.$\triangle ABC$ 所在平面上的点 P,使得 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$ 和 $\triangle ACP$ 的面积相等.这样的点 P 的个数是(　　).

(A)8　(B)4　(C)3　(D)1

5.在直角坐标系中,设 $A(-1,-2)$, $B(4,-1)$, $C(m,0)$, $D(n,n)$ 为四边形的四个顶点.当四边形 $ABCD$ 的周长最短时,$\frac{m}{n}$ 的值为(　　).

(A)-2　(B)-1　(C)$-\frac{1}{2}$　(D)1

二、填空题(每小题7分,共35分)

1.方程组 $\begin{cases}2x+y=z-1,\\ 8x^3+y^3=z^2-1\end{cases}$ 的正整数解 (x,y,z) 为______.

2.如图2,过原点的直线与反比例函数 $y=-\frac{7}{x}$ 的图像交于点 A、C,自点 A、C 分别作 x 轴的垂线,垂足分别为 B、D.则四边形 $ABCD$ 的面积等于______.

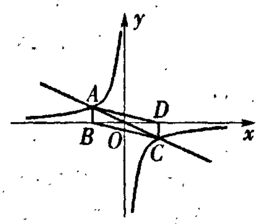

图2

3.在 $\triangle ABC$ 中,$\angle CAB=70^{\circ}$,$\angle CAB$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 I.若 $CA+AI=BC$,则 $\angle ACB$ 等于______度.

4.已知

$$A=\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\cdots+\frac{1\,004^2+1\,005^2}{1\,004\times1\,005}.$$

则 A 的整数部分是______.

5.在凸五边形 $ABCDE$ 中,$\angle BAE+\angle AED=270^{\circ}$,$\angle BCD=90^{\circ}$,$AB=3$,$BC=12$,$CD=5$,$DE=4$,$AE=8$.则五边形 $ABCDE$ 的面积等于______.

三、(10分)已知

$$\frac{x}{y+z+u}=\frac{y}{z+u+x}=\frac{z}{u+x+y}=\frac{u}{x+y+z}.$$

求 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}$ 的值.

四、(15分)在六边形 $ABCDEF$ 中,$AB\parallel DE$,$BC\parallel EF$,$CD\parallel FA$,$AB+DE=BC+EF$,$A_1D_1=B_1E_1$,A_1、B_1、D_1、E_1 分别是边 AB、BC、DE、EF 的中点.求证:$\angle CDE=\angle AFE$.

五、(15分)求证:

(1)一个自然数的平方被7除的余数只能是0,1,4,2;

(2)对任意的正整数 n，

$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$

不被7整除（$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数）.

参考答案

一、1.D 2.C 3.C 4.B 5.A

二、1.(1,3,6) 2.14 3.75 4.2 008 5.55.2

三、由已知得

$$\frac{x+y+z+u}{y+z+u}=\frac{x+y+z+u}{z+u+x}=\frac{x+y+z+u}{u+x+y}=\frac{x+y+z+u}{x+y+z}.$$

(1)如果分子 $x+y+z+u\neq0$，则由分母推得 $x=y=z=u$.此时，

$$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=1+1+1+1=4.$$

(2)如果分子 $x+y+z+u=0$，则

$x+y=-(z+u),y+z=-(u+x)$.

此时，$\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}$

$=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

四、如图3，作 $\square ABPF$，联结 DP，取 DP 的中点 M，则四边形 $BCDP$ 是梯形，联结 B_1M、E_1M.由梯形中位线定理知

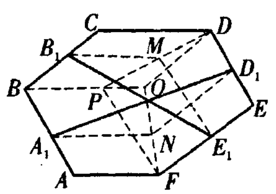

图3

$B_1M\parallel CD\parallel BP\parallel AF$,

$ME_1\parallel DE\parallel FP\parallel AB$,

且 $B_1M=\frac{BP+CD}{2}=\frac{AF+CD}{2}$,

$E_1M=\frac{PF+DE}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

同理，作 $\square BCDO$，联结 OF，取 OF 的中点 N，联结 A_1N、D_1N.由梯形中位线定理知

$A_1N\parallel AF\parallel BO\parallel CD$,

$ND_1\parallel EF\parallel OD\parallel BC$,

且 $A_1N=\frac{AF+BO}{2}=\frac{AF+CD}{2}$,

$D_1N=\frac{EF+OD}{2}=\frac{EF+BC}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

在 $\triangle B_1ME_1$ 与 $\triangle A_1ND_1$ 中，

$B_1M=A_1N,E_1M=D_1N$.

又因为 $A_1D_1=B_1E_1$，所以，

$\triangle B_1ME_1\cong\triangle A_1ND_1$.

因此，$\angle B_1ME_1=\angle A_1ND_1$.

故 $\angle CDE=\angle AFE$.

五、(1)设自然数

$m=7q+r(r=0,1,\cdots,6)$.

则 $m^2=(7q+r)^2=49q^2+14qr+r^2$.

由于 r^2 只能取0,1,4,9,16,25,36，被7除的余数对应为0,1,4,2,2,4,1.因此，一个自然数的平方被7除的余数只能是0,1,4,2.

(2)由于 $n(n+2)(n+4)(n+6)$

$=(n^2+6n)(n^2+6n+8)(n=1,2,\cdots)$，

令 $k=n^2+6n$.则

$n(n+2)(n+4)(n+6)$

$=(n^2+6n)(n^2+6n+8)$

$=k(k+8)(k\geqslant7)$.

故 $\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}$

$=\sqrt{k(k+8)}=\sqrt{k^2+8k}$.

由 $k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16$，则

$(k+3)^2<k^2+8k<(k+4)^2$.

因此，$k+3<\sqrt{k^2+8k}<k+4$，即

$[\sqrt{k^2+8k}]=k+3$.

也就是

$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$

$=k+3=n^2+6n+3=(n+3)^2-6$.

如果 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 被7整除，必须且只须 $(n+3)^2$ 被7除余6.然而，一个自然数的平方被7除的余数只能为0,1,4和2中的一个，因此，对任意的正整数 n，$(n+3)^2-6$ 不能被7整除，也就是

$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$

不能被7整除.

（李延林 提供）