

2013 年浦东新区初二数学竞赛

暨 2013 年上海市初中数学竞赛选拔赛试卷

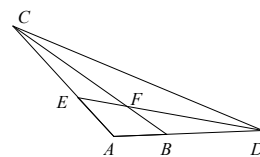
(2013 年 6 月 2 日 (周日) 上午 9:00~10:30)

题 号	一	二	总分
得 分			
评 卷			
复 核			

解答本试卷可以使用科学计算器。

一、 填空题 (本题总分 72 分, 第 1 至第 6 题每题 5 分, 第 7 至第 12 题每题 7 分)

1. 一个五位数 $\overline{195xy}$ 能被 105 整除, 那么这个五位数是_____.
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2013\sqrt{2013}$ 共有_____组整数解.
3. 一个三角形的三个顶点分别是 $(0,0)$, $(1,1)$, $(12m,0)$. 直线 $y = mx$ 把三角形的面积二等分, 所有满足条件的 m 的值之和是_____.
4. 已知, 如图: 在 $\triangle ACD$ 中, $AC=AD=3$, 点 B 、 E 分别在边 AD 、 AC 上, 且 $AB=AE=1$, BC 与 DE 相交于点 F , 则四边形 $ABFE$ 的面积与三角形 ADC 的面积之比为_____.
5. 已知一个三角形的周长是 30, 其中一条边是另一边的长度的 2 倍, 则最小边 m 的长度范围是_____.
6. 设正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 在以五个点 A 、 B 、 C 、 D 、 O 为顶点所构成的所有三角形中任意取出两个, 它们的面积相等的概率为_____.
7. 已知 $Rt\triangle ABC$ 位于第一象限内, 点 A 的坐标为 $(1,2)$, 两条直角边 AB 和 AC 分别平行于 x 轴和 y 轴, $AB=6$, $AC=3$, 如果反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象与 $Rt\triangle ABC$ 有交点, 则 k 的取值范围是_____.
8. 已知在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=2AB$, 点 M 是 AD 的中点, 点 E 在 AB 边上, 且 $CE \perp AB$. 联结 ME , 如果 $\angle CEM = 43^\circ$, 那么 $\angle DME$ 的度数是_____.
9. 甲、乙两人从点 A 同时同向出发沿 400 米的环形跑道跑步, 经过一段时间后, 甲在跑道上离 A 点 200 米处, 而乙在离 A 点不到 100 米处正向 A 点跑去. 若甲、乙两人的速度之比是



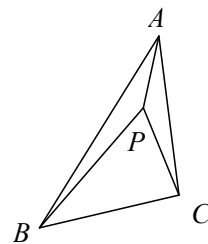
第 4 题图

5:4, 则此时乙至少跑了_____米.

10. 已知, m 、 n 是正整数, 且满足 $2\left(\sqrt{\frac{11}{m}} + \sqrt{\frac{11}{n}}\right)$ 是正整数, 则这样的有序数对 (m, n) 可以是_____。(请写出一个满足条件的有序数对, 且 $m \neq n$.)

11. 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 52, 自顶点 D 作 $DE \perp AB, DF \perp BC, E、F$ 为垂足, 若 $DE=5, DF=8$, 则 $BE+BF=$ _____.

12. P 为 $\triangle ABC$ 内部一点, 使得 $\angle PBC=30^\circ, \angle PBA=8^\circ$, 且 $\angle PAB=\angle PAC=22^\circ$, 则 $\angle APC$ 的度数为_____.

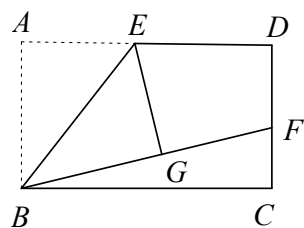


第 12 题图

二、解答题 (本大题共 3 小题, 第 13、14 题每题 9 分, 第 15 题 10 分, 共 28 分.)

13. 已知 a, b, c 为三个不同的正整数, 满足 $a+b+c=154$, 并且任意两个数的和都是完全平方数, 求 a, b, c 的值 (a, b, c 不按顺序).

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 AD 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠后得到 $\triangle GBE$, 且点 G 在矩形 $ABCD$ 内部. 延长 BG 交 DC 于点 F .



(1) 若 $DC=2DF$, 求 $\frac{AD}{AB}$ 的值.

(2) 若 $DC=nDF$, 求 $\frac{AD}{AB}$ 的值.

15. 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大 x 的整数, 如 $[2.1] = 2, [-2.5] = -3$. 解方程: $x + \frac{75}{x} = [x] + \frac{75}{[x]}$.

封
○

封
○

线
○

参考答案:

一、填空题

- 1、19530 . 2、 2014. 3、 $-\frac{1}{12}$. 4、 $\frac{1}{6}$. 5、 $5 < m < \frac{15}{2}$. 6、 $\frac{3}{7}$. 7、 $2 \leq k \leq \frac{121}{8}$.
8、141 度. 9、1120 米. 10、(99,396), (396,99), (44,11), (11,44) (任意写一个即可) 11、
 $6+3\sqrt{3}$ 或 $26+13\sqrt{3}$. 12、142 度.

二、解答题

13.解: 因为 $a+b+c=154$,

所以 $(a+b) + (b+c) + (a+c) = 154 \times 2 = 308$,2 分

且 $a+b$, $b+c$, $a+c$ 是 1、4、9、16、25...121、144 中的数,1 分

不妨设 $a > b > c$, 则 $a+b > b+c$, $a+b > a+c$.

即 $a+b > \frac{308}{3} > 102$1 分

$\therefore a+b$ 为 121 或 144.1 分

(1) 当 $a+b=121$, 则 $(b+c)+(a+c) = 308 - 121 = 187$. 又 $\because b+c, a+c$ 都小于 121, 且是完全

平方数, 有 $(b+c)+(a+c) < 100 + 81 = 181$. 所以, 此情况不成立.1 分

(2) 当 $a+b=144$, 则 $(b+c)+(a+c) = 308 - 144 = 164$.

此时 $a+c, b+c$ 是能为 100 和 64.1 分

即
$$\begin{cases} a+b=144, \\ b+c=64, \\ c+a=100. \end{cases}$$
1 分

解得
$$\begin{cases} a=90, \\ b=54, \\ c=10. \end{cases}$$
1 分

14.(1) $\triangle ABE \cong \triangle GBE$,

则 $AE=EG$,1 分

又因为 E 是 AD 的中点, 证得 $GF=DF$,2 分

因为 $DC=2DF$, 设 $DF=FC=GF=x, AB=DC=2x$. 则 $BF=3x$1 分

在 $Rt\triangle BFC$ 中, 由勾股定理可得 $BC=2\sqrt{2}x$,1 分

得 $\frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$1 分

(2) 由 (1) 证得 $GF=DF$, 设 $DF=GF=x, FC=(n-1)x, AB=DC=BG=nx$, 则 $BF=(n+1)x$1 分

在 $Rt\triangle BFC$ 中, 由勾股定理可得 $BC=2\sqrt{n}x$,1 分

得 $\frac{AD}{AB} = \frac{2\sqrt{n}}{n}$1 分

15. 解: (1) 当 x 是整数, 则 $[x]=x$, 所有非零整数都是原方程的解.2 分

(2) 当 x 不是整数, 则 $[x] \neq x$, 由原方程得2 分

$$(x - [x])(x[x] - 75) = 0.$$

所以 $x[x] = 75$①2 分

设 $[x] = n$, 则 $x = n + a, 0 < a < 1$1 分

代入①, 得 $(n + a)n = 75$1 分

当 $n > 0$ 时, $n^2 < 75 < n(n+1)$, 这样的整数不存在;1 分

当 $n < 0$ 时, $n^2 < 75 < n(n+1)$, 只有整数 $n = -9$ 满足, 此时 $x = -\frac{75}{9} = -\frac{25}{3}$1 分

综上所述, 原方程的解为所有非零整数和 $-\frac{25}{3}$.