●竞赛之窗●

首届女子数学奥林匹克

(2002-08-16～08-17，珠海)

第 一 天

一、求出所有的正整数 n，使得 $20n+2$ 能整除 $2\,003n+2\,002$.

二、夏令营有 $3n$(n 是正整数)位女同学参加，每天都有 3 位女同学担任值勤工作. 夏令营结束时，发现这 $3n$ 位女同学中的任何两位，在同一天担任值勤工作恰好是一次.

(1)问：当 $n=3$ 时，是否存在满足题意的安排？证明你的结论；

(2)求证：n 是奇数.

三、试求出所有的正整数 k，使得对任意满足不等式

$$k(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$$

的正数 a、b、c，一定存在三边长分别为 a、b、c 的三角形.

四、$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 B、C 两点，且 BC 是 $\odot O_1$ 的直径. 过点 C 作 $\odot O_1$ 的切线，交 $\odot O_2$ 于另一点 A，连结 AB，交 $\odot O_1$ 于另一点 E，连结 CE 并延长，交 $\odot O_2$ 于点 F. 设点 H 为线段 AF 内的任意一点，连结 HE 并延长，交 $\odot O_1$ 于点 G，连结 BG 并延长，与 AC 的延长线交于点 D. 求证：$\frac{AH}{HF}=\frac{AC}{CD}$.

第 二 天

五、设 $P_1,P_2,\cdots,P_n(n\geq 2)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列. 求证：

$$\frac{1}{P_1+P_2}+\frac{1}{P_2+P_3}+\cdots+\frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}>\frac{n-1}{n+2}.$$

六、求所有的正整数对 (x,y)，满足 $x^y=y^{x-y}$.

七、锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD、BE、CF. 求证：$\triangle DEF$ 的周长不超过 $\triangle ABC$ 周长的一半.

八、设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 是平面上任意取定的 8 个点，对平面上任意取定的一条有向直线 l，设 $A_1,A_2,\cdots,A_8$ 在该直线上的射影分别是 $P_1,P_2,\cdots,P_8$. 如果这 8 个射影两两不重合，依直线 l 的方向依次排列为 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_8}$，这样，就得到了 $1,2,\cdots,8$ 的一个排列 $i_1,i_2,\cdots,i_8$(在图 1 中，此排列为 $2,1,8,3,7,4,6,5$). 设这 8 个点对平面上所有有向直线作射影后，得到的不同排列的个数为 $N_8=N(A_1,A_2,\cdots,A_8)$，试求 N_8 的最大值.

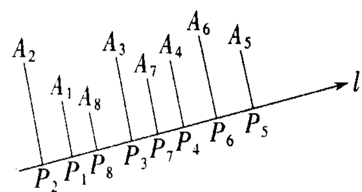

图 1

参 考 答 案

一、显然，$2\nmid n$. 令 $n=2m(m\in\mathbf{N}^*)$，则

$(20m+1)\mid(2\,003m+1\,001)$.

因 $2\,003m+1\,001=100(20m+1)+3m+901$，

故 $(20m+1)\mid(3m+901)$.

易知 $\frac{3m+901}{20m+1}=1,2,3,4$ 时都无正整数解. 因此，$\frac{3m+901}{20m+1}\geq 5$，可知 $m\leq\frac{896}{97}<10$. 但对 $m=1,2,\cdots,9$ 逐一检验知 $(20m+1)\nmid(3m+901)$. 所以满足题设要求的 n 不存在.

另解：同上，$(20m+1)\mid(2\,003m+1\,001)$.

由 $(20m+1,20)=1$，

$(2\,003m+1\,001)\times 20-(20m+1)\times 2\,003=18\,017$ 可知，$(20m+1)\mid 18\,017$. 注意到 $18\,017=43\times 419$，43、419 为素数，故 $20m+1=43,419,18\,017$，但均无正整数解. 所以，不存在满足题设要求的 n.

二、(1)当 $n=3$ 时，存在满足题意的安排. 具体安排如下(把 9 位女同学记为 $1,2,\cdots,9$)：

$(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),(1,8,9),(2,4,6),(2,7,8),(2,5,9),(3,4,8),(3,5,7),(3,6,9),(4,7,9),(5,6,8)$.

(2)任意选一位女同学，因为她和其他每一位女

同学恰好值勤一次,并且每天有 3 人值勤,所以,其余 $3n-1$ 位女同学两两成对.

故 $2|(3n-1)$. 所以, n 是奇数.

三、因 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$,

故 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

可知 $k>5$. 注意到 k 为正整数,因此, $k\geq 6$.

由于不存在边长分别为 1、1、2 的三角形,依题设,有

$$k(1\times 1+1\times 2+1\times 2)\leq 5(1^2+1^2+2^2),$$

即 $k\leq 6$.

以下证明 $k=6$ 满足题设要求.

不妨设 $a\leq b\leq c$,则

$$6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2),$$

即 $5c^2-6(a+b)c+5a^2+5b^2-6ab<0$.

$$\begin{aligned}\Delta&=[6(a+b)]^2-4\times 5(5a^2+5b^2-6ab)\\&=64[-(a-b)^2+ab]\\&\leq 64ab\leq 64\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=16(a+b)^2.\end{aligned}$$

因此,可得

$$c<\frac{6(a+b)+\sqrt{\Delta}}{10}\leq\frac{6(a+b)+4(a+b)}{10}=a+b.$$

这表明以 a、b、c 为长度可构成三角形.

以下是证明 $k=6$ 满足题意的其他一些方法.

方法一:不妨设 $a\leq b\leq c$. 若 $c\geq a+b$,则

$$5a^2+5b^2+5c^2-6ab-6bc-6ca$$
$$=4(a-b)^2+[5c-(a+b)][c-(a+b)]\geq 0,$$

与 $6(ab+bc+ca)>5(a^2+b^2+c^2)$

矛盾. 故 $c<a+b$.

方法二:构造函数

$$f(x)=5x^2-6(a+b)x+5a^2+5b^2-6ab.$$

则 $f(c)<0$.

因 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3}{5}(a+b),+\infty\right)$ 递增,且

$$f(a+b)=5(a+b)^2-6(a+b)(a+b)+5a^2+5b^2-6ab=4(a-b)^2\geq 0,$$

故 $c<a+b$.

四、如图 2,因 BC 是 $\odot O_1$ 的直径, AC 与 $\odot O_1$ 切于 C,故 $\angle BEC=\angle FEA=\angle BCA=\angle BCD=90°$.

设 $\angle ABC=\alpha$, $\angle CBD=\beta$,则 $\angle AFC=\alpha$, $\angle CEG=\beta$.

根据正弦定理,有

$$\frac{AH}{\sin\angle HEA}=\frac{HE}{\sin\angle HAE},$$

$$\frac{HF}{\sin\angle FEH}=\frac{HE}{\sin\angle HFE},$$

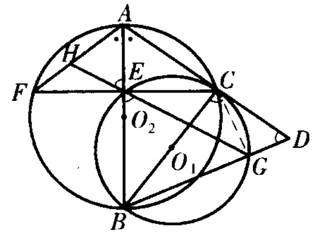

图 2

即 $\dfrac{AH}{HE}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, $\dfrac{HF}{HE}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

两式相除得 $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ ①

在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\dfrac{AC}{BC}=\tan\alpha$;

在 Rt $\triangle BCD$ 中, $\dfrac{CD}{BC}=\tan\beta$.

两式相除得 $\dfrac{AC}{CD}=\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ ②

由 ①、②知 $\dfrac{AH}{HF}=\dfrac{AC}{CD}$.

五、根据柯西不等式,有

$$\left(\frac{1}{P_1+P_2}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\right)[(P_1+P_2)+\cdots+(P_{n-1}+P_n)]\geq(n-1)^2.$$

则
$$\begin{aligned}&\frac{1}{P_1+P_2}+\cdots+\frac{1}{P_{n-1}+P_n}\\&\geq\frac{(n-1)^2}{2(P_1+\cdots+P_n)-P_1-P_n}\\&\geq\frac{(n-1)^2}{n(n+1)-3}=\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)-1}\\&>\frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)}=\frac{n-1}{n+2}.\end{aligned}$$

六、若 $x=1$,则 $y=1$;若 $y=1$,则 $x=1$;若 $x=y$,则 $x=y=1$. 故只需讨论 $x>y\geq 2$ 的情形. 由方程得

$$1<\left(\frac{x}{y}\right)^y=y^{x-2y}.$$

故 $x>2y$, $y|x$.

设 $x=ky$,则 $k\geq 3$, $k\in\mathbf{N}$. 于是, $k^y=y^{(k-2)y}$.

有 $k=y^{k-2}$.

因 $y\geq 2$,故 $y^{k-2}\geq 2^{k-2}$.

用数学归纳法易证 $2^k>4k(k\geq 5)$. 于是,仅可能 $k=3,4$.

当 $k=3$ 时, $y=3$, $x=9$;当 $k=4$ 时, $y=2$, $x=8$.

所以,全部解 (x,y) 为 $(1,1)$, $(9,3)$, $(8,2)$.

七、证法一:由于 D、E、A、B 四点共圆,且 AB 为该圆直径,根据正弦定理,可得

$$\frac{DE}{\sin\angle DAE}=AB=c,$$

即 $DE=c\sin\angle DAE$.

又 $\angle DCA=90°-\angle DAC$,所以, $DE=c\cos C$.

同理，$DF = b\cos B$.

于是，$DE + DF = c\cos C + b\cos B$

$= (2R\sin C)\cos C + (2R\sin B)\cos B$

$= R(\sin 2C + \sin 2B) = 2R\sin(B + C)\cos(B - C)$

$= 2R\sin A \cdot \cos(B - C) = a\cos(B - C) \leq a$.

同理，$DE + EF \leq b$，$EF + DF \leq c$.

将上述三式相加得

$$DE + EF + FD \leq \frac{1}{2}(a + b + c).$$

证法二：设 M 为 BC 中点，E' 为 E 关于 BC 的对称点，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

如图 3，因 B、D、H、F 四点共圆，故 $\angle 1 = \angle 4$. 同理，$\angle 2 = \angle 3$. 又 $\angle 1 = \angle 2$，故 $\angle 4 = \angle 3$. 又 $\angle 3 = \angle 5$，所以 $\angle 4 = \angle 5$，F、D、E' 三点共线.

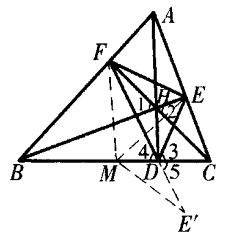

图 3

在直角 $\triangle BCE$ 和直角 $\triangle BCF$ 中，有 $EM = FM = \frac{1}{2}BC$. 而 $ME' = ME$，故

$$DE + DF = DE' + DF = E'F \leq MF + ME' = BC.$$

同理，$DE + EF \leq AC$，$EF + FM \leq AB$.

将上述三式相加，即知命题成立.

证法三：先证 $\triangle DEF$ 是锐角 $\triangle ABC$ 的所有内接三角形中周长最短的三角形.

设点 D 是 BC 边上任一固定点，如图 4，作点 D 关于 AB、AC 的对称点 D_1、D_2，连结 D_1D_2 分别交 AB、AC 于点 E'、F'，则 $\triangle D'E'F'$ 周长最短.

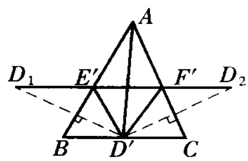

图 4

事实上，

$\triangle D'E'F'$ 的周长 $= D'E' + E'F' + F'D'$

$= D_1E' + E'F' + F'D_2 = D_1D_2$.

在 AB、AC 上任取 E_1、F_1，则

$\triangle DE_1F_1$ 的周长 $= DE_1 + E_1F_1 + F_1D$

$= D_1E_1 + E_1F_1 + F_1D_2 \geq D_1D_2$，

当且仅当 E_1、F_1 分别与 E'、F' 重合时取等号. 所以，当点 D 固定时，上述 $\triangle D'E'F'$ 周长最短.

因 $\angle D_1AD_2 = 2\angle BAC$，$AD_1 = AD' = AD_2$，根据余弦定理，$D_1D_2$ 的长度仅与 AD' 有关，当 AD' 取最小值时，D_1D_2 也取最小值. 此时，$\triangle D'E'F'$ 为 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形，故点 D' 应为 BC 边上高线的垂足 D.

如图 5，$\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，则 $\triangle ABC$ 的三条高平分 $\triangle DEF$ 的内角，有

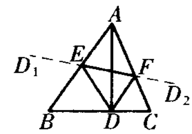

图 5

$\angle AFE = \angle DFC = \angle CFD_2$，

从而，E、F、D_2 三点共线.

同理，D_1、E、F 三点共线.

综上所述，垂足 $\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 中周长最短的内接三角形.

分别在 $\triangle ABC$ 的三边上取中点 M、N、L，则

$DE + EF + FD \leq MN + NL + LM$

$= \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

注：本题证明方法较多，这里仅给出其中三种解答.

八、对两条平行且同方向的有向直线，$A_1, A_2, \cdots, A_8$ 的射影次序一定相同. 所以，只要讨论通过一定点 O 的所有有向直线即可.

若所取的有向直线与某两点的连线垂直，则该两点的射影必重合，所以不产生相应的排列. 不然，$A_1, A_2, \cdots, A_8$ 的射影必两两不重合，因此，对应地有一个排列.

设通过点 O 且与某两点连线垂直的所有直线的数目为 k. 显见，$k \leq C_8^2 = 28$. 由此产生 $2k$ 条有向直线，依逆时针方向排列，设它们依次是 $l_1, l_2, \cdots, l_{2k}$，如图 6.

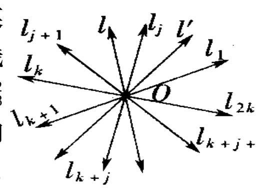

图 6

对任意一条有向直线 l（不同于 $l_1, \cdots, l_{2k}$）一定存在两条相邻的有向直线 l_j、l_{j+1}，使得 l_j、l、l_{j+1} 按逆时针方向排列. 显见，对取定的 j，由这样的 l 所得到的相应排列必相同.

若对不同于 $l_1, \cdots, l_{2k}$ 的两条有向直线 l、l'，不存在 j，使得 l_j、l、l_{j+1} 及 l_j、l'、l_{j+1} 都满足上一段叙述中所说的要求，则必有 j，使 l'、l_j、l 按逆时针方向排列. 设 l_j 垂直于 A_{j_1} 和 A_{j_2} 的连线，显见点 A_{j_1} 和 A_j 在有向直线 l、l' 上的射影的次序一定不同，相应得到的排列必不同.

如上所述，不同的排列数为 $2k$. 注意到，$k = C_8^2$ 是可以取到的，所以，$N_8 = 56$.

（命题组成员：潘承彪　钱展望　苏淳　李胜宏　熊斌　吴伟朝　祁建新　钱展望执笔整理）