

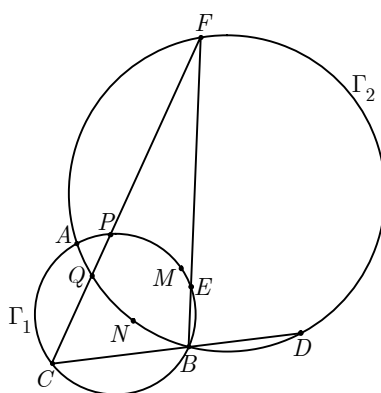
2010 中国数学奥林匹克

第一天

2010-01-22 8:00-12:30 重庆

每题 21 分.

1. 如图, 两圆 Γ_1, Γ_2 相交于 A, B 两点, 过点 B 的一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 C, D , 过点 B 的另一条直线分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 E, F , 直线 CF 分别交圆 Γ_1, Γ_2 于点 P, Q . 设 M, N 分别是弧 PB , 弧 QB 的中点. 求证: 若 $CD = EF$, 则 C, F, M, N 四点共圆.



2. 设整数 $k \geq 3$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_k = 2k$, 且对所有 $n > k$, 有

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & \text{若 } a_{n-1} \text{ 与 } n \text{ 互素,} \\ 2n, & \text{若 } a_{n-1} \text{ 与 } n \text{ 不互素.} \end{cases}$$

证明: 数列 $\{a_n - a_{n-1}\}$ 中有无穷多项是素数.

3. 设复数 a, b, c 满足: 对任意模不超过 1 的复数 z , 都有 $|az^2 + bz + c| \leq 1$. 求 $|bc|$ 的最大值.