

2010 女子数学奥林匹克

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2010)11-0026-05

第一天

1. 给定整数 $n (n \geq 3)$, 设 A_1, A_2, \dots, A_{2n} 是集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的两两不同的非空子集, 记 $A_{2n+1} = A_1$. 求

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$$

的最大值.

(梁应德 供题)

2. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 是边 BC 的中点, E 是 $\triangle ABC$ 外一点, 满足 $CE \perp AB$, $BE = BD$. 过线段 BE 的中点 M 作直线 MF

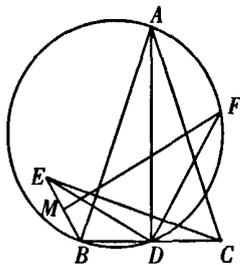


图 1

$\perp BE$, 交 $\triangle ABD$ 的外接圆的劣弧 \widehat{AD} 于点 F . 求证: $ED \perp DF$.

(郑煥 供题)

3. 求证: 对于每个正整数 n , 都存在满足下面三个条件的质数 p 和整数 m :

(1) $p \equiv 5 \pmod{6}$;

(2) $p \nmid n$;

(3) $n \equiv m^3 \pmod{p}$. (付云皓 供题)

4. 设实数 x_1, x_2, \dots, x_n 满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

($n \geq 2$). 求证:

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n ix_i^2}\right)^2 \frac{x_k^2}{k}$$

$$\leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k},$$

并确定等号成立的条件. (李胜宏 供题)

第二天

5. 已知 $f(x), g(x)$ 都是定义在 \mathbf{R} 上递增的一次函数, $f(x)$ 为整数当且仅当 $g(x)$ 为整数. 证明: 对一切 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - g(x)$ 为整数. (刘诗雄 供题)

6. 如图 2, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, M 为边 BC 的中点,

$\angle BAC$ 的外角平分线交直线 BC 于点 P . 点 K, F 在直

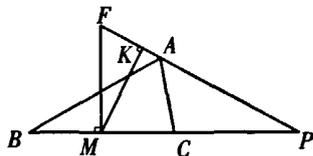


图 2

线 PA 上, 使得 $MF \perp BC, MK \perp PA$. 求证:

$$BC^2 = 4PF \cdot AK. \quad (\text{边红平 供题})$$

7. 给定正整数 $n (n \geq 3)$. 对于 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若 $i < j < k$, 则称 x_j 介于 x_i 和 x_k 之间 (如在排列 $(1, 3, 2, 4)$ 中, 3 介于 1 和 4 之间, 4 不介于 1 和 2 之间). 设集合 $S = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 的每个元素 P_i 是 $1, 2, \dots, n$ 的排列. 已知 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意三个不同数中都有一个数, 它在每个 $P_i (1 \leq i \leq m)$ 中都不介于另外两个数之间. 求 m 的最大值.

(冯祖鸣 供题)

8. 试求满足下列条件的最大 5 的最小奇数 a : 存在正整数 m_1, n_1, m_2, n_2 , 使得

$$a = m_1^2 + n_1^2, a^2 = m_2^2 + n_2^2,$$

且 $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$.

(朱华伟 供题)

参考答案 第一天

1. 对任意的 i , 若 $|A_i \cap A_{i+1}| = 0$, 则

$$\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} = 0.$$

以下假设 $|A_i \cap A_{i+1}| \geq 1$.

因 $A_i \cap A_{i+1} \subseteq A_i$ 及 $A_i \cap A_{i+1} \subseteq A_{i+1}$, 所以,

$$|A_i \cap A_{i+1}| \leq \min(|A_i|, |A_{i+1}|).$$

又 $A_i \neq A_{i+1}$ 及 $|A_i \cap A_{i+1}| \geq 1$, 则

$$\max(|A_i|, |A_{i+1}|) \geq 2.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } & \sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\max(|A_i|, |A_{i+1}|)} \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} = n. \end{aligned}$$

上式的等号是可以取到的, 例如:

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, \dots, A_{2i-1} = \{i\},$$

$$A_{2i} = \{i, i+1\}, \dots, A_{2n-1} = \{n\},$$

$$A_{2n} = \{n, 1\}.$$

2. 如图3, 易知 $AD \perp BC$. 由此可知 $\triangle ABD$ 的外接圆的圆心为线段 AB 的中点 O .

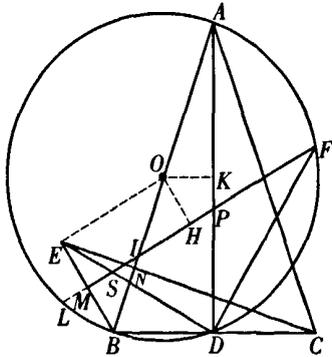


图3

延长 FM 交 $\odot O$ 于点 L , 联结 OE , 过点 O 作 $OH \perp FL$, $OK \perp AD$, 分别交 FL 、 AD 于点 H 、 K . 设直线 FM 分别与直线 ED 、 AB 、 AD 交于点 S 、 I 、 P , 直线 CE 与 AB 交于点 N .

由条件知 $CN \perp AB$.

所以, A 、 N 、 D 、 C 四点共圆.

故 $BD \cdot BC = BN \cdot AB$.

因为 $BC = 2BE$, $AB = 2BO$, 所以,

$$BE^2 = BN \cdot BO.$$

由射影定理得 $OE \perp BE$.

从而, 四边形 $OEMH$ 是矩形.

$$\text{则 } OH = EM = \frac{1}{2}BE.$$

因为 O 是 AB 的中点, 且 $OK \parallel BD$, 所以,

$$OK = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}BE = OH.$$

于是, $FL = AD$.

从而, $\widehat{LD} = \widehat{AF} \Rightarrow \angle PFD = \angle PDF$.

因为 $MF \perp BE$, 所以,

$$\angle BED + \angle MSE = 90^\circ.$$

而 $\angle PDS + \angle BDE = 90^\circ$, 且

$$\angle BED = \angle BDE,$$

于是, $\angle PDS = \angle MSE = \angle DSP$.

因此, $\angle FDS = 90^\circ$, 即 $ED \perp FD$.

3. 证法1 先证明: 模6余5的质数有无穷多个.

若不然, 则模6余5的质数只有有限多个, 设它们从小到大依次为 p_1, p_2, \dots, p_r .

考虑数 $6p_1 p_2 \dots p_r - 1$.

因其模6余5, 所以, 它的质因子模6余1或5. 特别地, 它有一个质因子 q 模6余5. 但由 $p_s \mid (6p_1 p_2 \dots p_r - 1)$ ($s = 1, 2, \dots, r$), 得 $q \notin \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, 矛盾.

其次, 由于模6余5的质数有无穷多个, 其中必有不整除 n 的质数, 设其中一个为 $p = 6k + 5$, 则条件(1)、(2)成立.

取 $m = n^{4k+3}$, 由费马小定理得

$$m^3 = (n^{4k+3})^3 = (n^{6k+4})^2 n \equiv n \pmod{p},$$

这样的 p 和 m 即满足题目条件.

证法2 当 $n = 1$ 时, 取 $p = 5, m = 1$;

当 $n = 2$ 时, 取 $p = 5, m = 3$.

易验证 p 和 m 满足题目条件.

下面假设 $n \geq 3$.

由 $(n-1)^3 - n > 0$ 及

$$(n-1)^3 - n \equiv (n-1) - n \equiv 5 \pmod{6},$$

知 $(n-1)^3 - n$ 必有一个模 6 余 5 的质因子.

取 p 为这个质因子, 并取 $m = n - 1$.

下证这样的 p 和 m 满足条件.

由 p, m 的取法知条件(1)、(3)成立.

$$\text{由 } (m^3 - n, n) = (m^3, n)$$

$$= ((n-1)^3, n) = (1, n) = 1,$$

知 $p \nmid n$, 即条件(2)成立.

因此, 存在满足题目条件的 p 和 m .

4. 注意到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2x_k^2}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} + \sum_{k=1}^n \frac{kx_k^2}{\left(\sum_{i=1}^n ix_i^2 \right)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{2 \sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} + \frac{\sum_{k=1}^n kx_k^2}{\left(\sum_{i=1}^n ix_i^2 \right)^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n kx_k^2}. \end{aligned}$$

于是, 要证原不等式只需证

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 &\leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n kx_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n kx_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} &\leq \frac{(n+1)^2}{4n}. \end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n kx_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{k=1}^n kx_k^2 \right) \left(n \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n kx_k^2 + n \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4n} \left[\sum_{k=1}^n \left(k + \frac{n}{k} \right) x_k^2 \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{4n} \left[\sum_{k=1}^n (n+1) x_k^2 \right]^2 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4n}. \end{aligned}$$

若要等号成立, 首先, 必有

$$\sum_{k=1}^n \left(k + \frac{n}{k} \right) x_k^2 = \sum_{k=1}^n (n+1) x_k^2.$$

而当 $k=2, 3, \dots, n-1$ 时, 有

$$k + \frac{n}{k} < n+1.$$

因此, $x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$.

其次, 要 $\sum_{k=1}^n kx_k^2 = n \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}$, 即

$$x_1^2 + nx_n^2 = nx_1^2 + x_n^2.$$

故 $x_1^2 = x_n^2$.

由 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ 和 $x_2^2 = x_3^2 = \dots = x_{n-1}^2 = 0$, 得

$$x_1^2 = x_n^2 = \frac{1}{2}, \text{ 而这也是等号成立的充分条件.}$$

因此, 等号成立的充要条件为

$$x_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0, x_n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

第二天

5. 若不然, 由对称性不妨设 $a > c$.

由 $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, 知 $g\left(-\frac{b}{a}\right)$ 是整数;

由 $f\left(-\frac{b-1}{a}\right) = 1$, 知 $g\left(-\frac{b-1}{a}\right)$ 是整数.

故 $g\left(-\frac{b}{a}\right) - g\left(-\frac{b-1}{a}\right)$

$$= \left[c\left(-\frac{b}{a}\right) + d \right] - \left[c\left(-\frac{b-1}{a}\right) + d \right]$$

$$= -\frac{c}{a}$$

是一个整数, 但这与 $a > c > 0$ 矛盾.

所以, $a = c$.

又 $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, 故 $g\left(-\frac{b}{a}\right) = d - b$ 是整数.

因此, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - g(x) = b - d$$

是整数.

6. 如图 4, 设 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 交直线 FM 于点 D , AD 交 BC 于点 E .

对于 $1, 2, \dots, n$ 中任意三个数 $a < b < c$, 由构造知在每个排列中, c 或者在 a 和 b 的左侧, 或者在 a 和 b 的右侧, 永远不会介于 a 和 b 之间.

故这样的 2^{n-1} 个排列满足题目条件.

综上, m 的最大值为 2^{n-1} .

$$\begin{aligned} 8. \text{ 由 } 261 &= 15^2 + 6^2, 261^2 = 189^2 + 180^2, \\ 15 - 6 &= 189 - 180, \end{aligned}$$

知 261 具有题目所述性质.

下证: 261 就是大于 5 且具有题目所述性质的最小奇数, 即 5 和 261 之间不存在这样的奇数.

若不然, 则存在介于 5 和 261 之间的奇数 a 及正整数 m_1, n_1, m_2, n_2 , 满足

$$a = m_1^2 + n_1^2, a^2 = m_2^2 + n_2^2, m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

设 $m_1 - n_1 = l$, 由对称性不妨设 $l \geq 0$.

由 a 是奇数, 知 m_1, n_1 的奇偶性不同.

所以, l 是一个奇数.

又由 $m_1 < \sqrt{261} < 17$, 知 $l \leq 15$.

因此, l 为 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 之一.

若 $l = 1$, 则 $m_2 - n_2 = 1$.

结合 $a^2 = m_2^2 + n_2^2$, 得

$$(2n_2 + 1)^2 - 2a^2 = -1,$$

即 $(2n_2 + 1, a)$ 是佩尔方程 $x^2 - 2y^2 = -1$ 的一组解.

易知, 此方程解的 y 值由小到大依次为

$$1, 5, 29, 169, 985, \dots,$$

其中, 满足 $5 < a < 261$ 的只有

$$a = 29 \text{ 或 } a = 169.$$

但这两个数均无法表示成 $m_1^2 + n_1^2$ ($m_1 - n_1 = 1$) 的形式, 矛盾.

若 $3 \mid l$, 则 $a^2 \equiv 2n_2^2 \pmod{3}$.

由 2 不是 3 的平方剩余知 $3 \mid a$.

所以, $3 \mid m_1, 3 \mid n_1$.

于是, $9 \mid a$.

$$\text{故 } 81 \mid (m_2^2 + n_2^2), \text{ 即 } 9 \left[\left(\frac{m_2}{3} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{3} \right)^2 \right].$$

由 -1 不是 3 的平方剩余知

$$3 \mid \frac{m_2}{3}, 3 \mid \frac{n_2}{3}.$$

因此, $9 \mid m_2, 9 \mid n_2$.

故 $9 \mid l$, 即 $l = 9$.

由于 $a < 261 = 15^2 + 6^2$, 故 $n_1 < 6$, 只能有 $n_1 = 3, a = 12^2 + 3^2 = 153$.

但由 $153^2 = (n_2 + 9)^2 + n_2^2$, 得

$$(2n_2 + 9)^2 = 9^2 \times 577,$$

矛盾.

若 $l = 11$ 或 $l = 13$, 则

$$a^2 \equiv 2n_2^2 \pmod{l}.$$

由 2 不是 l 的平方剩余知 $l \mid a$.

又由 $0 \equiv a \equiv 2n_1^2 \pmod{l}$, 知 $l \mid n_1$.

所以, $n_1 \geq l$, 即 $m_1 \geq 2l$.

故 $a \geq 5l^2 > 500 > 261$, 矛盾.

若 $l = 5$, 则 $a^2 \equiv 2n_2^2 \pmod{5}$.

由 2 不是 5 的平方剩余知 $5 \mid a$.

又由 $0 \equiv a \equiv 2n_1^2 \pmod{5}$, 知 $5 \mid n_1$.

若 $n_1 \geq 10$, 则 $m_1 \geq 15$.

故 $a \geq 15^2 + 10^2 = 325 > 261$, 矛盾;

若 $n_1 = 5$, 则

$$m_1 = 10, a = 10^2 + 5^2 = 125.$$

但由 $125^2 = (n_2 + 5)^2 + n_2^2$, 得

$$(2n_2 + 5)^2 = 5^2 \times 1249,$$

矛盾.

若 $l = 7$, 则由 $a < 261 < 16^2 + 9^2$ 知 $n_1 \leq 8$.

对 n_1 穷举知 a 只能为

$$65, 85, 109, 137, 169, 205, 245$$

之一.

由 $a^2 = (n_2 + 7)^2 + n_2^2$, 得

$$(2n_2 + 7)^2 = 2a^2 - 49.$$

因此, $2a^2 - 49$ 必须是一个完全平方数.

但对 $a = 65, 85, 109, 137, 169, 205, 245$ 逐一验证, 知这些 a 值均不满足条件.

综上, 大于 5 的具有题目所述性质的最小奇数 a 为 261.

(朱华伟 提供)

2010女子数学奥林匹克

作者: [朱华伟](#)
作者单位:
刊名: [中等数学](#)
英文刊名: [HIGH-SCHOOL MATHEMATICS](#)
年, 卷(期): 2010(11)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_zdsx201011008.aspx