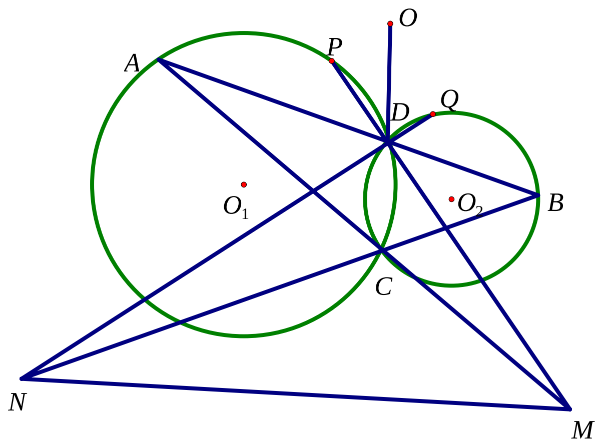
2007年中国西部数学奥林匹克

第一天　11月10日 上午8：00－12：00

每题15分

一、已知$T=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，对于$A\subseteq T, A\neq\varnothing$，定义$S(A)$为$A$中所有元素之和，问：$T$有多少个非空子集$A$，使得$S(A)$为3的倍数，但不是5的倍数？

二、如图，$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于点C，D，过点D的一条直线分别与$\odot O_1, \odot O_2$相交于点A，B，点P在$\odot O_1$的弧AD上，PD与线段AC的延长线交于点M，点Q在$\odot O_2$的弧BD上，QD与线段BC的延长线交于点N．O是$\triangle ABC$的外心．求证：$OD\perp MN$的充要条件为P，Q，M，N四点共圆．



三、设实数a，b，c满足$a+b+c=3$．求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leq\frac{1}{4}.$$

四、设O是$\triangle ABC$内部一点．证明：存在正整数p，q，r，使得

$$\left|p\cdot\overrightarrow{OA}+q\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}\right|<\frac{1}{2007}.$$

2007 西部数学奥林匹克

广西　　南宁

第二天　11 月 11 日 上午 8：00－12：00

每题 15 分

五、是否存在三边长都为整数的三角形，满足以下条件：最短边长为 2007，且最大的角等于最小角的两倍？

六、求所有的正整数 n，使得存在非零整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，y ，满足

$$\begin{cases} x_1+\cdots+x_n=0, \\ x_1^2+\cdots+x_n^2=ny^2. \end{cases}$$

七、设 P 是锐角三角形 ABC 内一点，AP，BP，CP 分别交边 BC，CA，AB 于点 D，E，F，已知$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$，求证：$P$ 是$\triangle ABC$ 的重心.

八、将 n 个白子与 n 个黑子任意地放在一个圆周上．从某个白子起，按顺时针方向依次将白子标以 $1,2,\cdots,n$. 再从某个黑子起，按逆时针方向依次将黑子标以 $1,2,\cdots,n$. 证明：存在连续 n 个棋子（不计黑白），　它们的标号所成的集合为 $\{1,2,\cdots,n\}$.

2007 西部数学奥林匹克

解　答

一、已知$T=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，对于$A\subseteq T, A\neq\varnothing$，定义$S(A)$为$A$中所有元素之和，问：$T$有多少个非空子集$A$，使得$S(A)$为3的倍数，但不是5的倍数？

解 对于空集$\varnothing$，定义$S(\varnothing)=0$.令$T_0=\{3,6\}, T_1=\{1,4,7\}, T_2=\{2,5,8\}$.对于$A\subseteq T$，令$A_0=A\cap T_0, A_1=A\cap T_1, A_2=A\cap T_2$，则

$$S(A)=S(A_0)+S(A_1)+S(A_2)\equiv|A_1|-|A_2|\pmod 3,$$

因此，$3|S(A)$当且仅当$|A_1|\equiv|A_2|\pmod 3$.有以下几种情况：

$$\begin{cases}|A_1|=0,\\|A_2|=0,\end{cases}\begin{cases}|A_1|=0,\\|A_2|=3,\end{cases}\begin{cases}|A_1|=3,\\|A_2|=0,\end{cases}\begin{cases}|A_1|=3,\\|A_2|=3,\end{cases}\begin{cases}|A_1|=1,\\|A_2|=1,\end{cases}\begin{cases}|A_1|=2,\\|A_2|=2,\end{cases}$$

从而满足$3|S(A)$的非空子集A的个数为

$$2^2(C_3^0C_3^0+C_3^0C_3^3+C_3^3C_3^0+C_3^3C_3^3+C_3^1C_3^1+C_3^2C_3^2)-1=87.$$

若$3|S(A)$，$5|S(A)$，则$15|S(A)$.

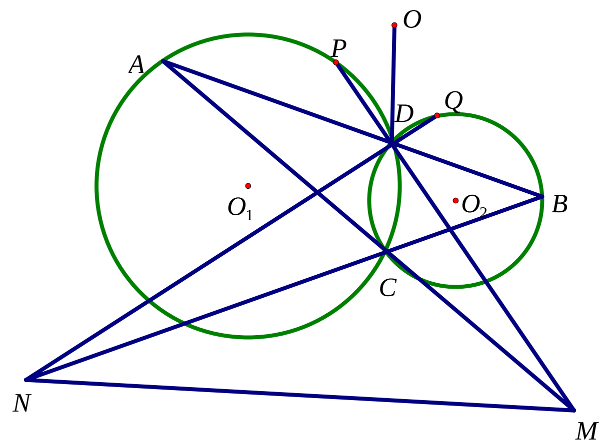
由于$S(T)=36$，故满足$3|S(A)$，$5|S(A)$的$S(A)$的可能值为15，30.而

15＝8＋7＝8＋6＋1＝8＋5＋2＝8＋4＋3＝8＋4＋2＋1
＝7＋6＋2＝7＋5＋3＝7＋5＋2＋1＝7＋4＋3＋1
＝6＋5＋4＝6＋5＋3+1＝6＋4＋3＋2
＝5＋4＋3＋2＋1，
36－30＝6＝5＋1＝4＋2＝3＋2＋1.

故满足$3|S(A)$，$5|S(A)$，$A\neq\varnothing$的A的个数为17.

所以，所求的A的个数为87－17＝70.

二、如图，$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于点C，D，过点D的一条直线分别与$\odot O_1,\odot O_2$相交于点A，B，点P在$\odot O_1$的弧AD上，PD与线段AC的延长线交于点M，点Q在$\odot O_2$的



弧 BD 上，QD 与线段 BC 的延长线交于点 N．O 是△ABC 的外心．求证：$OD\perp MN$ 的充要条件为 P，Q，M，N 四点共圆．

证 设三角形 ABC 的外接圆 O 的半径为 R，从 N 到圆 O 的切线为 NX，则

$$NO^2=NX^2+R^2=NC\cdot NB+R^2, \quad ①$$

同理

$$MO^2=MC\cdot MA+R^2. \quad ②$$

因为 A，C，D，P 四点共圆，所以

$$MC\cdot MA=MD\cdot MP, \quad ③$$

因为 Q，D，C，B 四点共圆，所以

$$NC\cdot NB=ND\cdot NQ, \quad ④$$

由①，②，③，④得

$$\begin{aligned}NO^2-MO^2&=ND\cdot NQ-MD\cdot MP\\&=ND(ND+DQ)-MD(MD+DP)\\&=ND^2-MD^2+(ND\cdot DQ-MD\cdot DP),\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}OD\perp MN&\Leftrightarrow NO^2-MO^2=ND^2-MD^2\\&\Leftrightarrow ND\cdot DQ=MD\cdot DP\\&\Leftrightarrow P,Q,M,N\text{ 四点共圆}.\end{aligned}$$

三、设实数 a，b，c 满足 $a+b+c=3$．求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}.$$

证 若 a，b，c 都小于 $\frac{9}{5}$，则可以证明

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}\le\frac{1}{24}(3-a). \quad (*)$$

事实上，

$$\begin{aligned}(*)&\Leftrightarrow (3-a)(5a^2-4a+11)\ge 24\\&\Leftrightarrow 5a^3-19a^2+23a-9\le 0\\&\Leftrightarrow (a-1)^2(5a-9)\le 0\\&\Leftarrow a<\frac{9}{5}\end{aligned}$$

同理，对 b，c 也有类似的不等式，相加便得

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}$$

$$\le \frac{1}{24}(3-a)+\frac{1}{24}(3-b)+\frac{1}{24}(3-c)=\frac{1}{4}.$$

若 a，b，c 中有一个不小于 $\frac{9}{5}$，不妨设 $a\ge\frac{9}{5}$，则

$$5a^2-4a+11=5a(a-\frac{4}{5})+11$$

$$\ge 5\cdot\frac{9}{5}\cdot(\frac{9}{5}-\frac{4}{5})+11=20，$$

故
$$\frac{1}{5a^2-4a+11}\le\frac{1}{20}.$$

由于 $5b^2-4b+11\ge 5(\frac{2}{5})^2-4\cdot(\frac{2}{5})+11=11-\frac{4}{5}>10$，所以 $\frac{1}{5b^2-4b+11}<\frac{1}{10}$，同理，$\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{10}$，所以

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}.$$

因此，总有 $\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\le\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

四、设 O 是△ABC 内部一点．证明：存在正整数 p，q，r，使得

$$\left|p\cdot\overrightarrow{OA}+q\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}\right|<\frac{1}{2007}.$$

证法一 先证一个引理：设α，β都是正实数，N 是任意一个大于 $\max\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\}$的整数，则存在正整数 p_1, p_2 和 q ,使得 $1\le q\le N^2$,且

$$|q\alpha-p_1|<\frac{1}{N},\ |q\beta-p_2|<\frac{1}{N}$$

同时成立.

引理的证明：考虑平面 N^2+1 个点组成的集合 T={({iα}，{iβ})|i=0,1,…, N^2 },这里[x]表示不超过实数 x 的最大整数,{x}=x-[x].

现在将正方形点集{(x,y)|0≤x,y<1}沿平行于坐标轴的直线分割为 N^2 个小正方形(这里的每个正方形都不含右边和上边的两条边)，则 T 中必有两点落在同一个小正方形内，即存在 $0\le j<i\le N^2$, 使得 |{iα}-{jα}|< $\frac{1}{N}$，|{iβ}-{jβ}|< $\frac{1}{N}$. 令

$q=i-j$, $p_1=[i\alpha]-[j\alpha]$, $p_2=[i\beta]-[j\beta]$，则 $|q\alpha-p_1|<\frac{1}{N}$, $|q\beta-p_2|<\frac{1}{N}$.

如果 $p_1\le 0$，那么 $\frac{1}{N}>|q\alpha|\ge\alpha$，与 N 的选择矛盾，故 p_1 为正整数.同理 p_2 也是正整数.引理获证.

回到原题，由条件知存在正实数α，β使得 $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，利用引理的结论知对任意大于 $\max\{\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\}$ 的正整数 N，存在正整数 p_1,p_2 和 q，使得

$$|q\alpha-p_1|<\frac{1}{N},\ |q\beta-p_2|<\frac{1}{N}$$

同时成立，于是，由 $q\alpha\overrightarrow{OA}+q\beta\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ 可得

$$\begin{aligned}|p_1\overrightarrow{OA}+p_2\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OC}|&=|(p_1-q\alpha)\overrightarrow{OA}+(p_2-q\beta)\overrightarrow{OB}|\\&\le|(p_1-q\alpha)\overrightarrow{OA}|+|(p_2-q\beta)\overrightarrow{OB}|\\&<\frac{1}{N}(|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|).\end{aligned}$$

取 N 充分大即可知命题成立.

证法二 由条件可知存在正实数β,γ使得 $\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，于是对任意正整数 k，都有 $k\overrightarrow{OA}+k\beta\overrightarrow{OB}+k\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，记 $m(k)=[k\beta]$，$n(k)=[k\gamma]$，这里 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$.

利用β,γ都是正实数可知 $m(kT)$ 与 $n(kT)$ 都是关于正整数 k 的严格递增数列，这里 T 是某个大于 $\max\{\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\}$ 的正整数.因此，

$$|kT\overrightarrow{OA}+m(kT)\overrightarrow{OB}+n(kT)\overrightarrow{OC}|=|-\{kT\beta\}\overrightarrow{OB}-\{kT\gamma\}\overrightarrow{OC}|$$

$$\le\{kT\beta\}|\overrightarrow{OB}|+\{kT\gamma\}|\overrightarrow{OC}|\le|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|.$$

这表明有无穷多个向量 $kT\overrightarrow{OA}+m(kT)\overrightarrow{OB}+n(kT)\overrightarrow{OC}$ 的终点落在一个以 O 为圆心，$|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|$ 为半径的圆内，因此，其中必有两个向量的终点之间的距离小于 $\frac{1}{2007}$，也就是说，这两个向量的差的模长小于 $\frac{1}{2007}$.即存在正整数 $k_1<k_2$，使得

$$|(k_2T\overrightarrow{OA}+m(k_2T)\overrightarrow{OB}+n(k_2T)\overrightarrow{OC})-(k_1T\overrightarrow{OA}+m(k_1T)\overrightarrow{OB}+n(k_1T)\overrightarrow{OC})|<\frac{1}{2007}.$$

于是，令 $p=(k_2-k_1)T,q=m(k_2T)-m(k_1T),r=n(k_2T)-n(k_1T)$,结合 T 与 $m(kT),n(kT)$的单调性可知 p,q,r 都是正整数. 命题获证.

五、是否存在三边长都为整数的三角形，满足以下条件：最短边长为 2007，且最大的角等于最小角的两倍？

解 不存在这样的三角形，证明如下：

不妨设$\angle A\le\angle B\le\angle C$,则$\angle C=2\angle A$,且 $a=2007$.过 C 作$\angle ACB$ 的内角平分线 CD,则$\angle BCD=\angle A$, 结合$\angle B=\angle B$.可知$\triangle CDB\backsim\triangle ACB$。所以，

$$\frac{CB}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{CD}{AC}=\frac{BD+CD}{BC+AC}=\frac{BD+AD}{BC+AC}=\frac{AB}{BC+AC}.$$

即 $c^2=a(a+b)=2007(2007+b)$, 这里 $2007\le b\le c<2007+b$.

由 a,b,c 都是正整数可知 $2007|c^2$,故 $3\cdot 223|c$,可设 $c=669m$,则 $223m^2=2007+b$,即 $b=223m^2-2007$, 结合 $2007\le b$,可得 $m\ge 5$.

另一方面，$c\ge b$, 所以，$669m\ge 223m^2-2007$,这要求 $m<5$.矛盾，因此，满足条件的三角形不存在.

六、求所有的正整数 n，使得存在非零整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y$，满足

$$\begin{cases}x_1+\cdots+x_n=0,\\x_1^2+\cdots+x_n^2=ny^2.\end{cases}$$

解 显然$n\ne 1$.

当$n=2k$为偶数时，令 $x_{2i-1}=1,x_{2i}=-1,i=1,2,\cdots,k$，$y=1$, 则满足条件.

当$n=3+2k\,(k\in\mathrm{N}_+)$时，令 $y=2$， $x_1=4,x_2=x_3=x_4=x_5=-1,$

$$x_{2i}=2,\ x_{2i+1}=-2,\ i=3,4,\cdots,k+1,$$

则满足条件.

当$n=3$时，若存在非零整数x_1,x_2,x_3，使得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1^2+x_2^2+x_3^2=3y^2,\end{cases}$$

则
$$2(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)=3y^2,$$

不妨设$(x_1,x_2)=1$，则x_1,x_2都是奇数或者一奇一偶，从而，$x_1^2+x_2^2+x_1x_2$是奇数，另

一方面，$2|y$，故$3y^2\equiv 0\pmod 4$，而$2(x_1^2+x_2^2+x_1x_2)\equiv 2\pmod 4$，矛盾.

综上所述，满足条件的正整数 n 为除了 1 和 3 外的一切正整数.

七、设 P 是锐角三角形 ABC 内一点，AP，BP，CP 分别交边 BC，CA，AB 于点 D，E，F，已知$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$.求证：$P$ 是$\triangle ABC$ 的重心.

证法一 记$\angle EDC=\alpha,\angle AEF=\beta,\angle BFD=\gamma$,用$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 分别表示$\triangle ABC$ 的三个内角的大小.则

$$\angle AFE = 2\angle B-（\angle DBE+\angle DEB）= 2\angle B-\alpha.$$

同理可证：$\angle BDF=2\angle C-\beta,\angle CED=2\angle A-\gamma$.

现在设$\triangle DEF$ 和$\triangle DEC$ 的外接圆半径为 R_1 和 R_2,则由正弦定理及$\angle EFD=\angle C$,可知 $2R_1=\dfrac{DE}{\sin\angle EFD}=\dfrac{DE}{\sin C}=2R_2$,故 $R_1=R_2$.类似可得$\triangle DEF$ 和$\triangle AEF$, $\triangle BDF$ 的外接圆半径相等.所以$\triangle DEF$，$\triangle AEF$, $\triangle BDF$ 和$\triangle DEC$ 这四个三角形的外接圆半径都相同，记为 R.

利用正弦定理得：

$$\frac{CE}{\sin\alpha}=\frac{EA}{\sin(2B-\alpha)}=\frac{AF}{\sin\beta}=\frac{FB}{\sin(2C-\beta)}=\frac{BD}{\sin\gamma}=\frac{DC}{\sin(2A-\gamma)}=2R. \qquad ①$$

再由 Ceva 定理可知$\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}=1$,结合上式得

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(2B-\alpha)\sin(2C-\beta)\sin(2A-\gamma)}=1. \qquad ②$$

若$\alpha<\angle$B, 则$\alpha=\angle EDC<\angle EFA=2\angle B-\alpha$,于是

$$\gamma=180°-\angle EFA-\angle EFD=180°-\angle EFA-\angle C$$

$$<180°-\angle EDC-\angle C=\angle CED=2\angle A-\gamma.$$

类似可知$\beta<2\angle C-\beta$.

注意到，当 $0<x<y<x+y<180°$时，有 $\sin x<\sin y$.所以，由 $0<\alpha<2\angle B-\alpha<\alpha+(2\angle B-\alpha)=2\angle B<180°$(这里用到$\triangle ABC$ 为锐角三角形)可得$\sin\alpha<\sin(2B-\alpha)$,同理$\sin\beta<\sin(2\angle C-\beta)$, $\sin\gamma<\sin(2\angle A-\gamma)$.这与②矛盾.

类似地，若$\alpha>\angle B$,可得②的左边小于右边，矛盾.所以，$\alpha=\angle B$.同理$\beta=\angle C,\gamma=\angle A$.因此，由①可知 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点.从而，P 为$\triangle ABC$ 的重心.

证法二 本题的结论对$\triangle ABC$ 为一般的三角形都成立.我们采用复数方法予以证

明.

设 P 为复平面上的原点，并直接用 X 表示点 X 对应的复数，则存在正实数α,β,γ,使得$\alpha A+\beta B+\gamma C=0$,且$\alpha+\beta+\gamma=1$.

由于 D 为 AP 与 BC 的交点,可解得 $D=-\dfrac{\alpha}{1-\alpha}A$,同样地,$E=-\dfrac{\beta}{1-\beta}B$,$F=-\dfrac{\gamma}{1-\gamma}C$.

利用△DEF∽△ABC 可知$\dfrac{D-E}{A-B}=\dfrac{E-F}{B-C}$,于是

$$\frac{\gamma BC}{1-\gamma}+\frac{\beta AB}{1-\beta}+\frac{\alpha BC}{1-\alpha}-\frac{\alpha AB}{1-\alpha}-\frac{\beta BC}{1-\beta}-\frac{\gamma CA}{1-\gamma}=0.$$

化简得：$(\gamma^2-\beta^2)B(C-A)+(\alpha^2-\gamma^2)A(C-B)=0$.这时，若$\gamma^2\neq\beta^2$，则$\dfrac{B(C-A)}{A(C-B)}\in R$,因此，$\dfrac{(C-A)/(C-B)}{(P-A)/(P-B)}\in R$,这要求 P 在△ABC 的外接圆上,与 P 在△ABC 内矛盾,所以$\gamma^2=\beta^2$,进而$\alpha^2=\gamma^2$，得$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{1}{3}$.即 P 为△ABC 的重心.命题获证.

八、将 n 个白子与 n 个黑子任意地放在一个圆周上．从某个白子起，按顺时钟方向依次将白子标以$1,2,\cdots,n$. 再从某个黑子起,按逆时钟方向依次将黑子标以$1,2,\cdots,n$. 证明：存在连续 n 个棋子（不计黑白），它们的标号所成的集合为$\{1,2,\cdots,n\}$.

证　取定标号相同的黑白棋子各一个，使得该对点所决定的劣弧中其他点（不含端点，不计黑白）的个数最少．不妨假设该标号为 1.

在上述所取的开劣弧中，只有一种颜色的棋子.

事实上，若两个 1 之间有两种颜色的棋子，则白 n 和黑 n 都在其中，如图 1，于是两个标号为 n 的劣弧之间的点比两个标号为 1 的更少，矛盾！

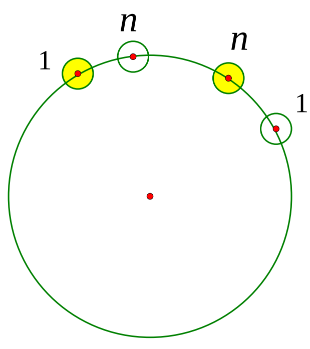


图 1

如果开劣弧中全是白子，有如下两种情形：

（1）开劣弧中的白子是 2，…，k，如图 2 所示，则从标号为 1 的白子起，按逆时针方向连续 n 个棋子的标号所成的集合为$\{1,2,\cdots,n\}$.

（2）开劣弧中的白子是 k，$k+1$，…，n，如图 3 所示，则从标号为 1 的白

子起，按顺时针方向连续 n 个棋子的标号所成的集合为 $\{1,2,\cdots,n\}$.

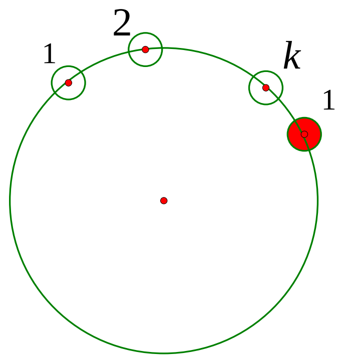


图 2

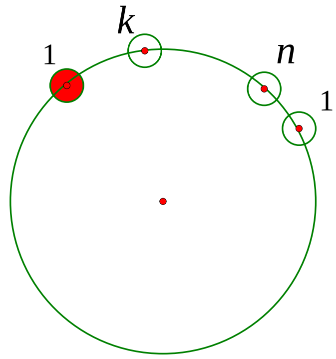


图 3

如果开劣弧中全是黑子，或者开劣弧中没有棋子，类似可得.