第六届中国西部数学奥林匹克试题及解答

一.（朱华伟供题）设 n 是给定的正整数，$n≥2$，$a_1, a_2, \cdots, a_n \in (0,1)$. 求

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})}$$

的最大值，这里 $a_{n+1}=a_1$.

解　由 AM－GM 不等式，得

$$\begin{aligned}
&\sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})}\\
&=2^{\frac{4}{6}}\sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}\\
&\le 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i+1-a_{i+1}+2)\\
&=2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i-a_{i+1}+3),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})}\\
&\le 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1}+3)\\
&=2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3n=\frac{n}{\sqrt[3]{2}},
\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{2}$.故 y 的最大值是 $\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$.

二.（冯志刚供题）求满足下述条件的最小正实数 k：对任意不小于 k 的 4 个互不相同的实数 a，b，c，d，都存在 a，b，c，d 的一个排列 p，q，r，s，使得方程

$$(x^2+px+q)(x^2+rx+s)=0$$

有 4 个互不相同的实数根.

解　所求最小正实数 $k=4$.

一方面，若 $k<4$，取 $a,b,c,d\in[k,\sqrt{4k})$，则对 (a,b,c,d) 的任意排列 (p,q,r,s)，方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式 $\Delta=p^2-4q<4k-4q\le 4k-4k=0$，该方程无实数根.所以，$k\ge 4$.

另一方面，设 a,b,c,d 是不小于 4 的 4 个不同实数，不妨设 $4\le a<b<c<d$，考察方程

$$x^2+dx+a=0, \qquad (1)$$

和

$$x^2+cx+b=0. \qquad (2)$$

首先，$d^2-4a>4(d-a)>0, c^2-4b>4(c-b)>0$，故（1）、（2）都有两个不同实根.

其次，若（1）与（2）有公共实根β，则$\begin{cases}\beta^2+d\beta+a=0,\\ \beta^2+c\beta+b=0,\end{cases}$两式相减，得$\beta=\dfrac{b-a}{d-c}>0$，这时，$\beta^2+d\beta+a>0$，矛盾.所以，（1）与（2）没有公共实根，从而$k=4$符合要求.

综上，问题的答案为$k=4$.

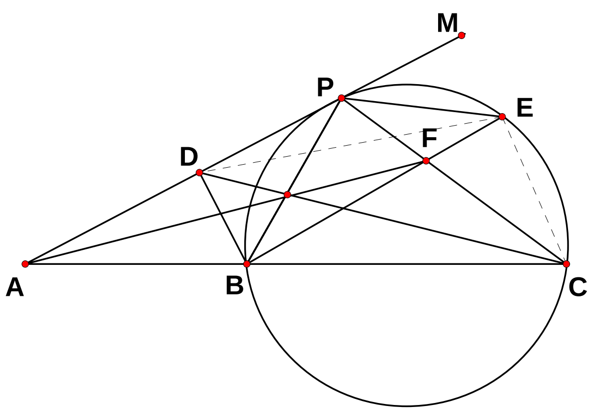
三.（熊斌供题） 如图，在△*PBC*中，$\angle PBC=60°$，过点*P*作△*PBC*的外接圆ω的切线，与*CB*的延长线交于点*A*. 点*D*和*E*分别在线段*PA*和圆ω上，使得$\angle DBE=90°$，*PD*＝*PE*. 连接*BE*，与*PC*相交于点*F*. 已知*AF*，*BP*，*CD*三线共点.

(1) 求证：*BF*是$\angle PBC$的角平分线；

(2) 求$\tan\angle PCB$的值.

解（1）当*BF*平分$\angle PBC$时，由于$\angle DBE=90°$，所以，*BD*平分$\angle PBA$，于是

$$\frac{PF}{FC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AD}{DP}=\frac{PB}{BC}\cdot\frac{BC}{BA}\cdot\frac{AB}{PB}=1,$$



所以，由Ceva定理的逆定理知，*AF*，*BP*，*CD*三线共点.

若还有一个角$\angle D'BF'$满足$\angle D'BF'=90°$，且AF', BP, CD'三线共点，不妨设F'在线段*PF*内，则D'在线段*AD*内，于是

$$\frac{PF'}{F'C}<\frac{PF}{FC},\qquad \frac{AD'}{PD'}<\frac{AD}{PD},$$

所以

$$\frac{PF'}{F'C}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AD'}{D'P}<\frac{PF}{FC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{AD}{PD}=1,$$

这与AF', BP, CD'三线共点矛盾.

所以，*BF*是$\angle PBC$的内角平分线.

（2）不妨设圆*O*的半径为1，$\angle PCB=\alpha$，由（1）知，

$$\angle PBE=\angle EBC=30°,$$

*E*是$\overset{\frown}{PC}$的中点. 因为$\angle MPE=\angle PBE=30°$，$\angle CPE=\angle CBE=30°$，所以由*PD*＝*PE*知，$\angle PDE=\angle PED=15°$，$PE=2\cdot 1\cdot\sin 30°, DE=2\cos 15°$.

又$BE=2\sin\angle ECB=2\sin(\alpha+30°)$，$\angle BED=\angle BEP-15°=\alpha-15°$，所以，在直角三角形*BDE*中，有

$$\cos(\alpha-15°)=\frac{BE}{DE}=\frac{2\sin(\alpha+30°)}{2\cos 15°},$$

$$\cos(\alpha-15°)\cos 15°=\sin(\alpha+30°),$$

$$\cos\alpha+\cos(\alpha-30°)=2\sin(\alpha+30°),$$

$$\cos\alpha+\cos\alpha\cos 30^\circ+\sin\alpha\sin 30^\circ=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha,$$

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\tan\alpha=\sqrt{3}\tan\alpha+1,$$

所以
$$\tan\alpha=\frac{6+\sqrt{3}}{11}.$$

四．（陶平生供题）设正整数 a 不是完全平方数，求证：对每一个正整数 n，

$$S_n=\left\{\sqrt{a}\right\}+\left\{\sqrt{a}\right\}^2+\cdots+\left\{\sqrt{a}\right\}^n$$

的值都是无理数．这里 $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

证明：设 $c^2<a<\left(c+1\right)^2$，其中整数 $c\ge 1$，则 $\left[\sqrt{a}\right]=c$，且 $1\le a-c^2\le 2c$，而 $\left\{\sqrt{a}\right\}=\sqrt{a}-\left[\sqrt{a}\right]=\sqrt{a}-c$．令

$$\left\{\sqrt{a}\right\}^k=(\sqrt{a}-c)^k=x_k+y_k\sqrt{a},k\in N^*,x_k,y_k\in Z.$$

则 $S_n=\left(x_1+x_2+...+x_n\right)+\left(y_1+y_2+...+y_n\right)\sqrt{a}$． ……①

下面证明，对所有正整数 n，$T_n=\sum_{k=1}^{n}y_k\ne 0$．由于

$$x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}-c\right)^{k+1}=\left(\sqrt{a}-c\right)\left(x_k+y_k\sqrt{a}\right)=(ay_k-cx_k)+(x_k-cy_k)\sqrt{a},$$

所以
$$\begin{cases}x_{k+1}=ay_k-cx_k,\\ y_{k+1}=x_k-cy_k.\end{cases}$$

由 $x_1=c,y_1=1$ 可得 $y_2=-2c$．

消去 $\left\{x_k\right\}$ 得，

$$y_{k+2}=-2c\,y_{k+1}+\left(a-c^2\right)y_k, \qquad ②$$

其中 $y_1=1,y_2=-2c$．

由数学归纳法易得

$$y_{2k-1}>0,y_{2k}<0. \qquad ③$$

由②和③，可得

$$y_{2k+2}-y_{2k+1}=-(2c+1)y_{2k+1}+(a-c^2)y_{2k}<0,$$
$$y_{2k+2}+y_{2k+1}=-(2c-1)y_{2k+1}+(a-c^2)y_{2k}<0,$$

相乘得 $y_{2k+2}^2-y_{2k+1}^2>0$，又因 $y_2^2-y_1^2>0$，故 $\left|y_{2k-1}\right|<\left|y_{2k}\right|$.

又由

$$y_{2k+1}-y_{2k}=-(2c+1)y_{2k}+(a-c^2)y_{2k-1}>0,$$
$$y_{2k+1}+y_{2k}=-(2c-1)y_{2k}+(a-c^2)y_{2k-1}>0,$$

相乘得 $y_{2k+1}^2-y_{2k}^2>0$，即 $\left|y_{2k}\right|<\left|y_{2k+1}\right|$.

所以，对所有正整数 n，都有

$$\left|y_n\right|<\left|y_{n+1}\right| \quad . \qquad ④$$

故由③ ④得，对所有正整数 n，都有 $y_{2k-1}+y_{2k}<0,\ y_{2k}+y_{2k+1}>0$. 因此

$$T_{2n-1}=y_1+(y_2+y_3)+\ldots+(y_{2n-2}+y_{2n-1})>0,$$

$$T_{2n}=(y_1+y_2)+(y_3+y_4)+\ldots+(y_{2n-1}+y_{2n})<0,$$

从而对所有正整数 n，都有 $T_n\neq 0$，故由①知，S_n 是无理数.

五.（王建伟供题）设 $S=\left\{n\,\middle|\,n-1,\ n,\ n+1\text{都可以表示为两个正整数的平方和}\right\}$.

证明：若 $n\in S$，则 $n^2\in S$.

证明　注意到若 x，y 是整数，则由奇偶性分析知

$$x^2+y^2\equiv 0,1,2 \pmod 4 .$$

若 $n\in S$，则由上知 $n\equiv 1 \pmod 4$．于是可设

$$n-1=a^2+b^2,\ a\geq b,$$

$$n=c^2+d^2,\ c>d \text{（}c\text{，}d\text{不可能相等），}$$

$$n+1=e^2+f^2,\ e\geq f,$$

其中 a，b，c，d，e，f 都是正整数.

则 $n^2+1=n^2+1^2$，$n^2=(c^2+d^2)^2=(c^2-d^2)^2+(2cd)^2$，

$$n^2-1=(a^2+b^2)(e^2+f^2)=(ae-bf)^2+(af+be)^2 .$$

假设 $b=a$，且 $f=e$，则 $n-1=2a^2, n+1=2e^2$，两式相减得，$e^2-a^2=1$，则 $e-a\geq 1$，

而$1=e^2-a^2=(e+a)(e-a)>1$，矛盾！

故 $b=a$，$f=e$ 不可能同时成立．

所以，$ae-bf>0$，于是$n^2\in S$．

六．（边红平供题）如图，AB是圆O的直径，C为AB延长线上的一点，过点C作圆O的割线，与圆O交于D，E两点，OF是△BOD的外接圆O_1的直径，连接CF并延长交圆O_1于点G．求证：O，A，E，G四点共圆．

证明　连接 AD，DG，GA，GO，DB，EA，EO．因为 OF 是等腰△DOB 的外接圆的直径，所以 OF 平分$\angle DOB$，即$\angle DOB=2\angle DOF$．又

$$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOB,$$

所以
$$\angle DAB=\angle DOF.$$

又 $\angle DGF=\angle DOF$，所以$\angle DAB=\angle DGF$，所以，G，A，C，D 四点共圆．所以

$$\angle AGC=\angle ADC. \quad ①$$

而
$$\angle AGC=\angle AGO+\angle OGF=\angle AGO+\frac{\pi}{2}, \quad ②$$

$$\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=\frac{\pi}{2}+\angle BDC, \quad ③$$

结合①，②，③得
$$\angle AGO=\angle BDC. \quad ④$$

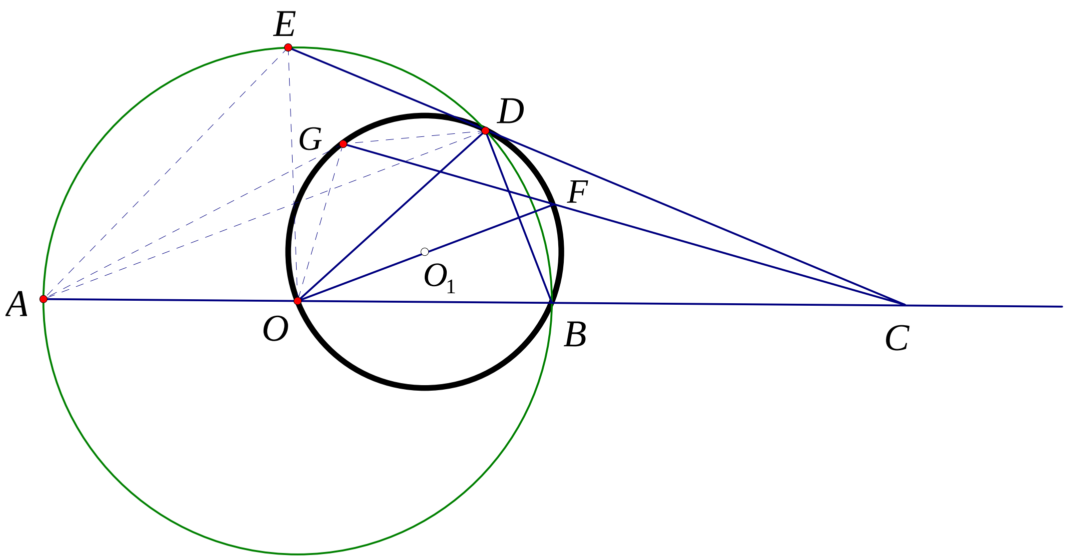
因为 B，D，E，A 四点共圆，所以

$$\angle BDC=\angle EAO, \quad ⑤$$

又 $OA=OE$，所以

$$\angle EAO=\angle AEO. \quad ⑥$$

由④，⑤，⑥得 $\angle AGO=\angle AEO$，所以，O，A，E，G 四点共圆．



七．（李伟固供题）设 k 是一个不小于 3 的正整数，θ 是一个实数．证明：如果$\cos(k-1)\theta$和$\cos k\theta$都是有理数，那么存在正整数$n>k$，使得$\cos(n-1)\theta$和$\cos n\theta$都是有理数．

证明　首先，我们证明如下结论：设α是一个实数，如果$\cos\alpha$是有理数，那么对任意正整数 m， $\cos m\alpha$是有理数.

对 m 用数学归纳法.

由$\cos\alpha$是有理数，得$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$也是有理数.

设对一切$m \le l(l \ge 2)$， $\cos m\alpha$是有理数，则由

$$\cos(l+1)\alpha = 2\cos l\alpha \cdot \cos\alpha - \cos(l-1)\alpha$$

知$\cos(l+1)\alpha$也是有理数，即当$m = l+1$时命题也成立.

由上述结论，对$\alpha = k\theta, (k-1)\theta$，分别令$m = k, k+1$得到$\cos k^2\theta, \cos(k^2-1)\theta$都是有理数，又$k^2 > k$，从而命题得证.

八.（冷岗松供题）给定正整数$n(\ge 2)$，求$\left|X\right|$的最小值，使得对集合 X 的任意 n 个二元子集$B_1, B_2, \cdots, B_n$，都存在集合 X 的一个子集Y，满足：

（1）$\left|Y\right| = n$；

（2）对$i = 1, 2, \cdots, n$，都有$\left|Y \bigcap B_i\right| \le 1$.

这里$\left|A\right|$表示有限集合 A 的元素个数.（供题获得一等奖）

解　$|X|_{\min} = 2n-1$.

（1）当$|X| = 2n-2$时不一定存在条件的 Y.事实上，令　$X = \{1, 2, \cdots, 2n-2\}$，考虑 X 的一个划分$B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}, \cdots, B_{n-1} = \{2n-3, 2n-2\}$.因为$|Y| = n$，因此 Y 中至少有两个元素属于同一个B_j，故此时$|Y \cap B_j| > 1$，矛盾.

（2）下证$|X| = 2n-1$符合题意.

记$B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，$|B| = 2n-1-z$，则存在 z 个在所有$B_i$中未出现的元素，记为$a_1, a_2, \cdots, a_z$.

如果$z \ge n-1$，则取$Y = \{a_1, \cdots, a_{n-1}, d\}, d \in B$便可.

下设$z < n-1$.

设在$B_1, B_2, \cdots, B_n$中仅出现 1 次的元素有 t 个，因$\sum_{i=1}^{n}|B_i| = 2n$，则

$$t + 2(2n-1-z-t) \le 2n,$$

所以

$$t \ge 2n-2-2z.$$

故在$B_1, B_2, \cdots, B_n$中出现的次数≥ 2的元素至多累计出现了$2n-(2n-2-2z) = 2+2z$次.

考虑在 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中出现一次的元素 $b_1, b_2, \cdots, b_t$，于是 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中的元素不含 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 的 B_j 至多有 $\dfrac{2+2z}{2} = 1+z$ 个.

故至少有 $n-(z+1) = n-z-1$ 个 B_j 含有 $b_1, b_2, \cdots, b_t$.

不妨设 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1-z}$ 分别含有 $b_1, b_2, \cdots, b_t$ 中的元素 $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_{n-1-z}$，

（如果这样 $B_l (1 \le l \le n-1-z)$ 中有多个只选一个）.

因为 $2(n-1-z)+z = 2n-2-z < 2n-1$，所以必有某个元素 d 不出现在 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1-z}$ 中且出现在 $B_{n-z}, \cdots, B_n$ 中，记 $Y = \{a_1, a_2, \cdots, a_z, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_{n-1-z}, d\}$，则 Y 满足要求.