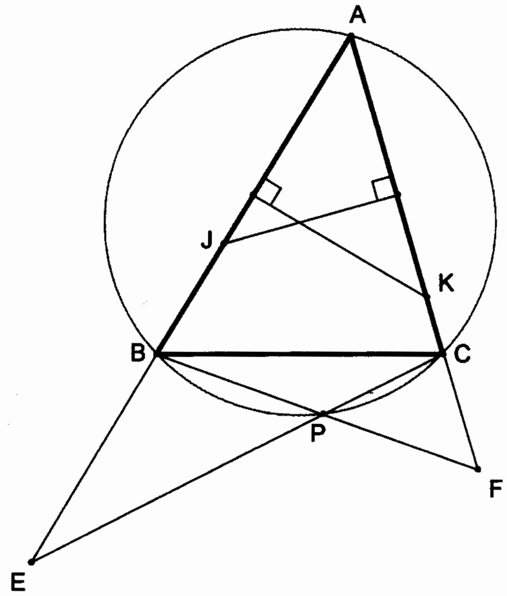
2005 女子数学奥林匹克

第一天

2005 年 8 月 12 日上午 8：00～12：00 长春

我们进行数学竞赛的目的，不仅仅是为了数学而数学，其着眼点还是因为它是一切科学的得力助手，因而提高数学，也为学好其他科学打好基础。

——华罗庚



1. 如图，设点 P 在$\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 CP 和 AB 相交于点 E，直线 BP 和 AC 相交于点 F，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 J，边 AB 的垂直平分线交边 AC 于点 K．求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}.$$

2． 求方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right),\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$$

的所有实数解．

3. 是否存在这样的凸多面体，它共有 8 个顶点，12 条棱和 6 个面，并且其中有 4 个面，每两个面都有公共棱？

4． 求出所有的正实数 a，使得存在正整数 n 及 n 个互不相交的无限集合 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\mathbf{Z}$，而且对于每个 A_i 中的任意两数 $b>c$，都有 $b-c\geq a^i$．

2005 女子数学奥林匹克

第二天

2005年8月13日上午 8：00～12：00 长春

数学竞赛，它对牢固基础知识、发展智力，培养拔尖人才，是一件具有战略意义的活动。

——华罗庚

5．设正实数 x，y 满足 $x^3+y^3=x-y$，求证：

$$x^2+4y^2<1.$$

6．设正整数 $n\geqslant 3$，如果在平面上有 n 个格点 P_1，P_2，…，P_n 满足：当 $|P_iP_j|$ 为有理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为无理数；当 $|P_iP_j|$ 为无理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为有理数，那么称 n 是“好数”．

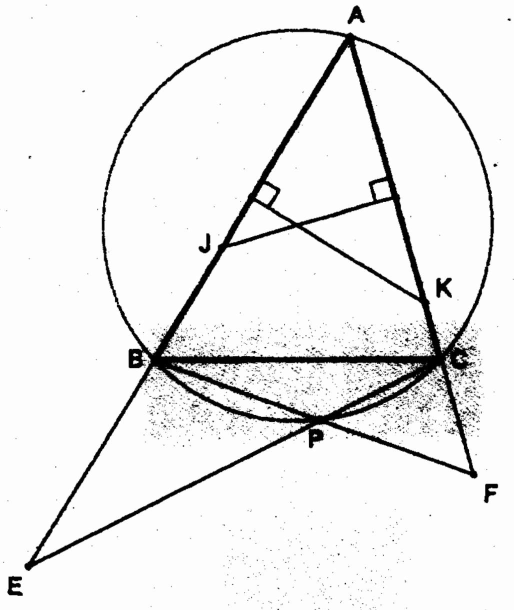
（1）求最小的好数；

（2）问：2005 是否为好数？

7．设 m，n 是整数，$m>n\geqslant 2$，$S=\{1, 2, \cdots, m\}$，$T=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 S 的一个子集．已知 T 中的任两个数都不能同时整除 S 中的任何一个数，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{m+n}{m}.$$

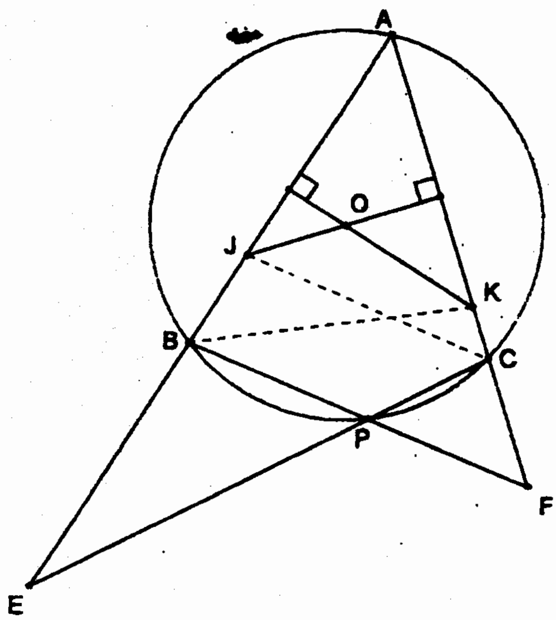
8．给定实数 a，b，$a>b>0$，将长为 a 宽为 b 的矩形放入一个正方形内（包含边界），问正方形的边至少为多长？



【题1】如图，设点P在$\triangle ABC$的外接圆上，直线CP和AB相交于点E，直线BP和AC相交于点F，边AC的垂直平分线交边AB于点J，边AB的垂直平分线交边AC于点K．求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}.$$

（叶中豪）



证：如图，连接BK，CJ．

$\angle E=\angle ABP-\angle BPE$，

而由A，B，P，C四点共圆，知$\angle BPE=\angle A$，

故 $\angle E=\angle ABP-\angle A$，

又由$KA=KB$，知$\angle A=\angle ABK$，

故 $\angle E=\angle ABP-\angle ABK=\angle KBF$． ①

同理 $\angle F=\angle JCE$． ②

由①，②得 $\triangle JEC\backsim\triangle KBF$．

由此，$\dfrac{CE}{BF}=\dfrac{JE}{KB}=\dfrac{JE}{AK}$， ③

$\dfrac{CE}{BF}=\dfrac{JC}{KF}=\dfrac{AJ}{KF}$． ④

将③，④两式的左端和右端分别相乘即得结论．

【题 2】求方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right), & ① \\ xy+yz+zx=1 & ②\end{cases}$$

的所有实数解.

（朱华伟）

解法一：

①式可化为 $\dfrac{x}{5\left(1+x^2\right)}=\dfrac{y}{12\left(1+y^2\right)}=\dfrac{z}{13\left(1+z^2\right)}$. ③

显然 x，y，z 同号. 首先求正数解.

存在 α，β，$\gamma\in$（0，π），使得 $x=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$y=\tan\dfrac{\beta}{2}$，$z=\tan\dfrac{\gamma}{2}$，则 3

$$\sin\alpha=\frac{2x}{1+x^2},\qquad \sin\beta=\frac{2y}{1+y^2},\qquad \sin\gamma=\frac{2z}{1+z^2},$$

③即

$$\frac{\sin\alpha}{5}=\frac{\sin\beta}{12}=\frac{\sin\gamma}{13}. \qquad ④$$ 3

②式可化为

$$\frac{1}{z}=\frac{x+y}{1-xy},$$

即
$$\cot\frac{\gamma}{2}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}.$$ 3

注意 $z\neq0$，$xy\neq1$，因为 α，β，$\gamma\in(0,\pi)$，所以

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2},$$

即
$$\alpha+\beta+\gamma=\pi.$$

从而 α，β，γ 是某个三角形 ABC 的三个内角. 3

由④和正弦定理知，α，β，γ 所对的边 a，b，c 的比是 5：12：13，所以，

$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\sin\beta=\dfrac{12}{13}$，$\sin\gamma=1$. 3

从而 $x=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}$ 或 5， $y=\tan\frac{\beta}{2}=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$， $z=\tan\frac{\gamma}{2}=1$.

将 $z=1$ 代入②式，易知 x 和 y 均小于 1．所以 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$ 是唯一正数解.

故原方程组有两组解：$\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{2}{3},\ -1\right)$.

解法二： 显然 x，y，z 同号.

由②得 $x=\frac{1-yz}{y+z}$，代入①得

$$12\left(\frac{y^2+1}{y}\right)=5\left(\frac{1-yz}{y+z}+\frac{y+z}{1-yz}\right)=5\cdot\frac{(1-yz)^2+(y+z)^2}{(y+z)(1-yz)}=5\frac{(y^2+1)(z^2+1)}{(y+z)(1-yz)},$$

即 $$5(z^2+1)y=12(y+z)(1-yz),$$

同理 $$5(y^2+1)z=13(y+z)(1-yz).$$

整理得

$$12y^2z+17yz^2=7y+12z,$$

$$18y^2z+13yz^2=13y+8z,$$

两式相加，得

$$30yz(y+z)=20(y+z),$$

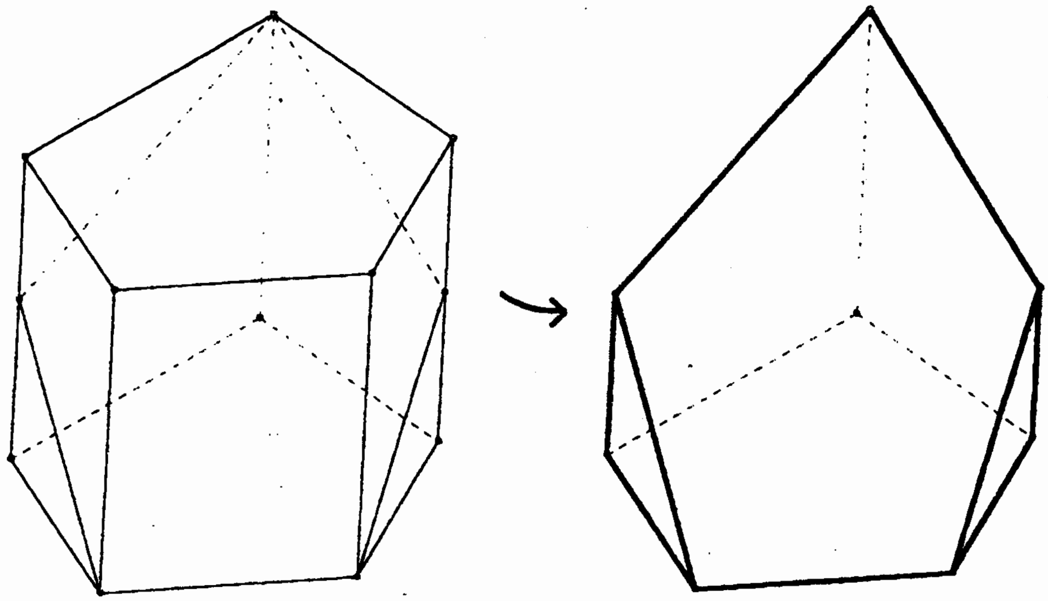
$\therefore$ $yz=\frac{2}{3}$， $y=\frac{2}{3z}$，代入①解得 $z=\pm1$.

故原方程组有两组解：$\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{3},\ 1\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{2}{3},\ -1\right)$.

【题 3】是否存在这样的凸多面体，它共有 8 个顶点，12 条棱和 6 个面，并且其中有 4 个面，每两个面都有公共棱？

（苏　淳）

解： 存在，如下图所示。



【题 4】 求出所有的正实数 a，使得存在正整数 n 及 n 个互不相交的无限集合 A_1，A_2，…，A_n 满足 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \mathbb{Z}$，而且对于每个 A_i 中的任意两数 $b>c$，都有 $b-c \geqslant a^i$．

（袁汉辉）

解：

若 $0<a<2$，n 充分大时，$2^{n-1}>a^n$，令

$A_i =\{2^{i-1}m \mid m\text{ 为奇数}\}$，$i=1, 2, \cdots, n-1$，

$A_n = \{2^{n-1}\text{ 的倍数}\}$，则该分拆满足要求.

若 $a \geqslant 2$，设 A_1，A_2，…，A_n 满足要求，令 $M=\{1, 2, \cdots, 2^n\}$，下证 $|A_i \cap M| \leqslant 2^{n-i}$．设 $A_i \cap M = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，$x_1<x_2<\cdots<x_m$，则

$2^n > x_m - x_1 = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) \geqslant (m-1)2^i$．

∴　$m-1<2^{n-i}$，即 $m<2^{n-i}+1$，故 $m \leqslant 2^{n-i}$．

$A_i \cap M$，$i=1, 2, \cdots, n$ 为 M 的一个分拆，故

$2^n = |M| = \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap M| \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} = 2^n - 1$，矛盾.

∴　所求的 a 为所有小于 2 的正实数.

【题5】设正实数 x，y 满足 $x^3+y^3=x-y$，求证：

$$x^2+4y^2<1.$$

（熊　斌提供）

证：　由平均不等式

$$5y^3+x^2y\geqslant 2\sqrt{5x^2y^4}>4xy^2,$$

所以
$$\left(x^2+4y^2\right)\left(x-y\right)<x^3+y^3,$$

从而
$$x^2+4y^2<\frac{x^3+y^3}{x-y}=1.$$

【题6】设正整数 $n \geqslant 3$，如果在平面上有 n 个格点 P_1，P_2，…，P_n 满足：当 $|P_iP_j|$ 为有理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为无理数；当 $|P_iP_j|$ 为无理数时，存在 P_k，使得 $|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 均为有理数，那么称 n 是"好数".

（1）求最小的好数；

（2）问：2005 是否为好数？

（冯祖鸣提供）

解： 我们断言最小的好数为 5，且 2005 是好数.

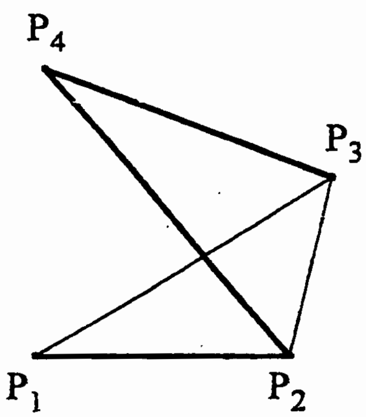
在三点组 $(P_i,\ P_j,\ P_k)$ 中，若 $|P_iP_j|$ 为有理数（或无理数），$|P_iP_k|$ 和 $|P_jP_k|$ 为无理数（或有理数），我们称 $(P_i,\ P_j,\ P_k)$ 为一个好组.

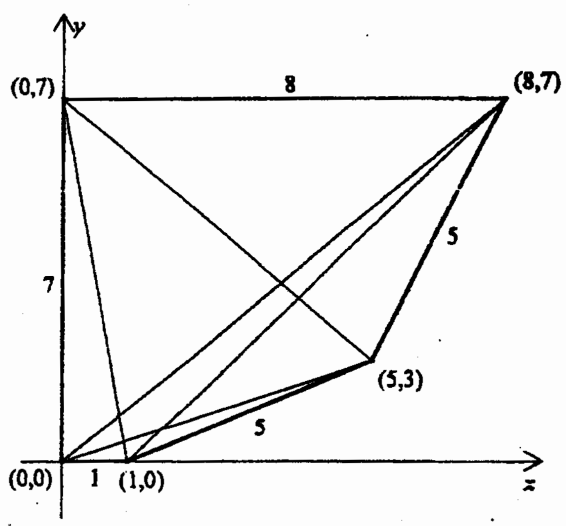
（1）$n=3$ 显然不是好数.

$n=4$ 也不是好数．若不然，假设 P_1，P_2，P_3，P_4 满足条件，不妨设 $|P_1P_2|$ 为有理数及 $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ 为一好组，则 $(P_2,\ P_3,\ P_4)$ 为一好组．显然 $(P_2,\ P_4,\ P_1)$ 和 $(P_2,\ P_4,\ P_3)$ 均不是好组．所以 P_1，P_2，P_3，P_4 不能满足条件．矛盾！

$n=5$ 是好数．以下五个格点满足条件：

$A_5=\{(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (5,\ 3),\ (8,\ 7),\ (0,\ 7)\}$.





（2）设

$$A=\{(1,0),(2,0),\cdots,(669,0)\}.$$

$$B=\{(1,1),(2,1),\cdots,(668,1)\}.$$

$$C=\{(1,2),(2,2),\cdots,(668,2)\}.$$

$$S_{2005}=A\cup B\cup C.$$

对任意正整数n，易证 n^2+1和n^2+4不是完全平方数．不难证明，对于集合S_{2005}中任两点P_i，P_j，$|P_iP_j|$为有理数当且仅当P_iP_j与某一坐标轴平行．所以，2005是好数．

注：当$n=6$时，

$$A_6=A_5\cup\{(-24,0)\};$$

当$n=7$时，

$$A_7=A_6\cup\{(-24,7)\}.$$

则可验证$n=6$和7均为好数．

当$n\geqslant 8$时，可像$n=2005$那样排成三行，表明$n\geqslant 8$时，所有的n都是好数．

【题 7】设 m，n 是整数，$m>n\geqslant 2$，$S=\{1, 2, \cdots, m\}$，$T=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 S 的一个子集．已知 T 中的任两个数都不能同时整除 S 中的任何一个数，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{m+n}{m}.$$

（张同君提供）

证：构造 $T_i=\{b\in S \mid a_i \mid b\}$，$i=1, 2, \cdots, n$．则

$$|T_i|=\left[\frac{m}{a_i}\right],$$

由于 T 中任意两个数都不能同时整除 S 中的一个数，所以当 $i\neq j$ 时，

$$T_i\cap T_j=\varnothing.$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}|T_i|=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]\leqslant m.$$

又因为
$$\frac{m}{a_i}<\left[\frac{m}{a_i}\right]+1,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{m}{a_i}\right]+1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{m}{a_i}\right]+\sum_{i=1}^{n}1\leqslant m+n,$$

即
$$m\sum\frac{1}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m}{a_i}<m+n,$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}<\frac{m+n}{m}.$$

【题 8】 给定实数 a，b， $a>b>0$， 将长为 a 宽为 b 的矩形放入一个正方形内（包含边界），问正方形的边至少为多长？

（陈永高提供）

解： 设长方形为 $ABCD$，$AB=a$，$BC=b$，中心为 O.

以 O 为原点，建立直角坐标系，x轴、y轴分别与正方形的边平行.

情形 1：线段 BC 与坐标轴不相交. 不妨设 BC 在第一象限内，$\angle BOX\leqslant\frac{1}{2}\left(90^{\circ}-\angle BOC\right)$（图 1）. 此时正方形的边长$\geqslant BD\cos\angle BOX\geqslant BD\cos\frac{90^{\circ}-\angle BOC}{2}$

$$=BD\cos 45^{\circ}\cos\frac{1}{2}\angle BOC+BD\sin 45^{\circ}\sin\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

所以此时所在正方形边长至少为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

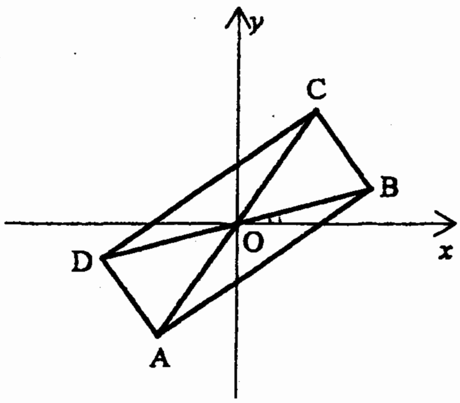


图 1

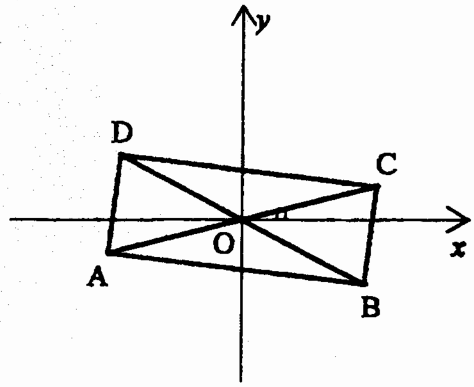


图 2

情形 2： 线段 BC 与坐标轴相交． 不妨设 BC 与x轴相交，不妨设$\angle COX\leqslant\frac{1}{2}\angle COB$（图 2）.

此时正方形的边长$\geqslant AC\cos\angle COX\geqslant AC\cos\frac{\angle COB}{2}=a$.

所以此时所在正方形边长至少为 a.

比较情形 1，2 中结论知：

若 $a<\left(\sqrt{2}+1\right)b$，则正方形的边长至少为 a.

若 $a\geq\left(\sqrt{2}+1\right)b$，则正方形的边长至少为 $\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.