2003 西部数学奥林匹克

(2003 - 09 - 27 —09 - 28 ,乌鲁木齐)

第 一 天

1. 将 1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 ,8 分别放在正方体的八个顶点上 ,使得每一个面上的任意三个数之和均不小于 10. 求每一个面上四个数之和的最小值.

2. 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{2n-1}(a_{i+1}-a_i)^2=1.$$

求 $(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的最大值.

3. 设 n 为给定的正整数. 求最小的正整数 u_n ,满足:对每一个正整数 d ,任意 u_n 个连续的正奇数中能被 d 整除的数的个数不少于奇数 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 中能被 d 整除的数的个数.

4. 证明:若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到边 AB、BC、CD、DA 的距离之和为定值 ,则 $ABCD$ 是平行四边形.

第 二 天

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_0=0$, $a_{n+1}=ka_n+\sqrt{(k^2-1)a_n^2+1}$, $n=0,1,2,\cdots$,其中 k 为给定的正整数. 证明:数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数 ,且 $2k\mid a_{2n}$, $n=0,1,2,\cdots$.

6. 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆 ,该内切圆切边 AB、BC、CD、DA 的切点分别为 A_1、B_1、C_1、D_1 ,连结 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 ,点 E、F、G、H 分别为 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 的中点. 证明:四边形 $EFGH$ 为矩形的充分必要条件是 A、B、C、D 四点共圆.

7. 设非负实数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 满足 $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1+x_i}=1$. 求证: $\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leqslant 1$.

8. 1 650 个学生排成 22 行、75 列. 已知其中任意两列处于同一行的两个人中 ,性别相同的学生都不超过 11 对. 证明:男生的人数不超过 928.

参 考 答 案

1. 设某个面上的四个数 a_1、a_2、a_3、a_4 之和达到最小值 ,且 $a_1<a_2<a_3<a_4$. 由于小于 5 的三个不同的正整数之和最大为 9 ,故 $a_4\geqslant 6$. 因此 ,

$$a_1+a_2+a_3+a_4\geqslant 16.$$

如图 1 所示的例子说明 16 是可以达到的.

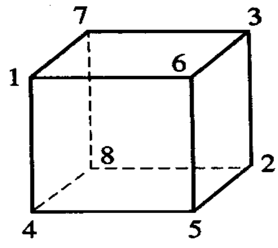

图 1

2. 当 $n=1$ 时 ,$(a_2-a_1)^2=1$,故 $a_2-a_1=\pm 1$. 易知此时欲求的最大值为 1.

当 $n\geqslant 2$ 时 ,设 $x_1=a_1$, $x_{i+1}=a_{i+1}-a_i$, $i=1,2,\cdots,2n-1$. 则 $\sum_{i=2}^{2n}x_i^2=1$,且 $a_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$, $k=1,2,\cdots,2n$.

由柯西不等式得

$$\begin{aligned}&(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=n(x_1+x_2+\cdots+x_n)+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}-[nx_1+(n-1)x_2+\cdots+x_n]\\&=x_2+2x_3+\cdots+(n-1)x_n+nx_{n+1}+(n-1)x_{n+2}+\cdots+x_{2n}\\&\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2]^{\frac12}\cdot(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{2n}^2)^{\frac12}\\&=\left[n^2+2\times\frac16(n-1)n(2(n-1)+1)\right]^{\frac12}\\&=\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}.\end{aligned}$$

当 $a_k=a_1+\frac{\sqrt3 k(k-1)}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$, $k=1,2,\cdots,n+1$,

$a_{n+k+1}=a_1+\frac{\sqrt3[2n^2-(n-k)(n-k-1)]}{2\sqrt{n(2n^2+1)}}$, $k=1,2,\cdots,n-1$ 时 ,上述不等式等号成立. 所以 ,

$$(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

的最大值为 $\sqrt{\frac{n(2n^2+1)}{3}}$.

3. $u_n=2n-1$.

(1) 先证 $u_n\geqslant 2n-1$.

由于 $u_1\geqslant 1$,不妨设 $n\geqslant 2$. 由于在 $1,3,\cdots,2n-1$ 中能被 $2n-1$ 整除的数的个数为 1 ,在 $2(n+1)-1$, $2(n+2)-1$, $\cdots$, $2(n+2n-2)-1$ 中能被 $2n-1$ 整除的数的个数为 0 ,因此 ,$u_n\geqslant 2n-1$.

(2) 再证 $u_n\leqslant 2n-1$.

只要考虑 d 为奇数且 $1 \leq d \leq 2n-1$. 考虑 $2n-1$ 个奇数: $2(a+1)-1, 2(a+2)-1, \cdots, 2(a+2n-1)-1$. 设 s、t 为整数,使得

$$(2s-1)d \leq 2n-1 < (2s+1)d,$$

$$(2t-1)d < 2(a+1)-1 \leq (2t+1)d.$$

于是,在 $1,3,\cdots,2n-1$ 中能被 d 整除的数的个数为 s. 故只要证明

$$[2(t+s)-1]d \leq 2(a+2n-1)-1$$

即可. 事实上,有

$$[2(t+s)-1]d = (2t-1)d+(2s-1)d+d$$
$$\leq 2(a+1)-3+2n-1+2n-1$$
$$=2(a+2n-1)-1.$$

因此, $u_n \leq 2n-1$.

综上所述,得 $u_n = 2n-1$.

4. 用记号 $d(P,l)$ 表示点 P 到直线 l 的距离. 先证一个引理.

引理 设 $\angle SAT = \alpha$ 是一个定角,则 $\angle SAT$ 内一动点 P 到两边 AS、AT 的距离之和为常数 m 的轨迹是线段 BC,其中 $AB = AC = \frac{m}{\sin\alpha}$. 若点 P 在 $\triangle ABC$ 内,则点 P 到两边 AS、AT 的距离之和小于 m;若点 P 在 $\triangle ABC$ 外,则点 P 到两边 AS、AT 的距离之和大于等于 m.

事实上,由 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$,知 $d(P,AB)+d(P,AC)=m$.

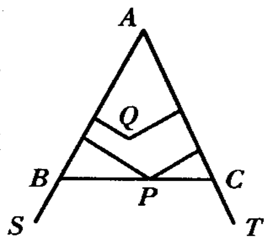

图 2

如图 2,若点 Q 在 $\triangle ABC$ 内,由 $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} < S_{\triangle ABC}$,得

$$d(Q,AB)+d(Q,AC)<m;$$

若点 Q 在 $\triangle ABC$ 外, $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} > S_{\triangle ABC}$,得

$$d(Q,AB)+d(Q,AC)>m.$$

(1) 若四边形 $ABCD$ 的两组对边都不平行,不妨设 BC 与 AD 相交于点 F, BA 与 CD 相交于点 E. 过点 P 分别作线段 l_1、l_2,使得 l_1 上的任意一点到 AB、CD 的距离之和为常数, l_2 上的任意一点到 BC、AD 的距离之和为常数,如图 3. 则

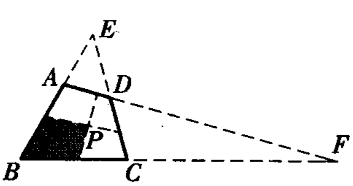

图 3

对于区域 S 内任意一点 Q,有

$$d(P,AB)+d(P,BC)+d(P,CD)+d(P,DA)$$
$$=d(Q,AB)+d(Q,BC)+d(Q,CD)+d(Q,DA)$$
$$=[d(Q,AB)+d(Q,CD)]+[d(Q,BC)+d(Q,DA)]$$
$$>[d(P,AB)+d(P,CD)]+[d(P,BC)+d(P,DA)].$$

矛盾.

(2) 若四边形 $ABCD$ 是梯形,也可推得矛盾.

5. 由题设可得

$$a_{n+1}^2 - 2ka_na_{n+1} + a_n^2 - 1 = 0.$$

所以, $a_{n+2}^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 1 = 0$.

将上面两式相减,得

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + 2ka_na_{n+1} = 0,$$

即 $(a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2ka_{n+1})=0$.

由题设条件知,数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的,所以,

$$a_{n+2} = 2ka_{n+1} - a_n. \qquad ①$$

结合 $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ 知,数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数.

因为数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数,由式①可知

$$2k \mid (a_{n+2} - a_n). \qquad ②$$

于是,由 $2k \mid a_0$,及式②可得

$$2k \mid a_{2n}, n = 0,1,2,\cdots.$$

6. 如图 4 所示,设 I 为四边形 $ABCD$ 的内切圆圆心. 由于 H 为 D_1A_1 的中点,而 AA_1 与 AD_1 为过点 A 所作的 $\odot I$ 的切线,故 H 在 AI 上,且 $AI \perp A_1D_1$.

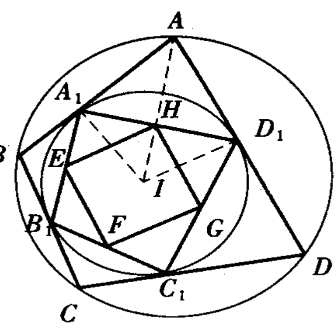

图 4

又 $ID_1 \perp AD_1$,故由射影定理可知 $IH \cdot IA = ID_1^2 = r^2$,其中 r 为内切圆半径.

同理可知, E 在 BI 上,且 $IE \cdot IB = r^2$. 于是, $IE \cdot IB = IH \cdot IA$,故 A、H、E、B 四点共圆. 所以,

$$\angle EHI = \angle ABE.$$

类似地,可证 $\angle IHG = \angle ADG$, $\angle IFE = \angle CBE$, $\angle IFG = \angle CDG$. 将这四个式子相加得

$$\angle EHG + \angle EFG = \angle ABC + \angle ADC.$$

所以, A、B、C、D 四点共圆的充要条件是 E、F、G、H 四点共圆. 而熟知一个四边形的各边中点围成

2003 年湖南省高中数学竞赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设函数 $f(x)=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$. 若

$f(x_1x_2\cdots x_{2003})=8$,

则 $f(x_1^2)+f(x_2^2)+\cdots+f(x_{2003}^2)$ 的值等于( ).

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) $2\log_a 8$

2. 如图 1, $S-ABC$ 是三条棱两两互相垂直的三棱锥, O 为底面 ABC 内一点. 若 $\angle OSA=\alpha$, $\angle OSB=\beta$, $\angle OSC=\gamma$, 那么, $\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$ 的取值范围是( ).

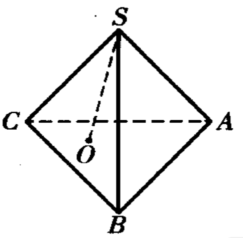

图 1

(A) $[2\sqrt{2},+\infty)$ (B) $(0,2\sqrt{2})$

(C) $[1,2\sqrt{2}]$ (D) $(1,2\sqrt{2})$

3. 某水池装有编号为 1, 2, …, 9 的 9 个进出口水管, 有的只进水, 有的只出水. 已知所开的水管号与水池灌满水所需的时间如表 1. 若 9 个水管一齐开, 则灌满水池需( )小时.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

表 1

水管号	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	9,1
时间(小时)	2	4	8	16	31	62	124	248	496

4. 若以圆锥曲线的一条经过焦点的弦为直径的圆与对应的准线无公共点, 则此圆锥曲线为( ).

(A) 双曲线 (B) 椭圆

(C) 抛物线 (D) 椭圆或双曲线

5. 有 10 个不同的球, 其中 2 个红球、5 个黄球、3 个白球. 若取到 1 个红球得 5 分, 取到 1 个黄球得 1 分, 取到 1 个白球得 2 分, 则从中取出 5 个球, 使得总分大于 10 分且小于 15 分的取法种数为( ).

(A) 90 (B) 100 (C) 110 (D) 120

的四边形是平行四边形, 平行四边形为矩形的充要条件是该四边形的四个顶点共圆. 因此, $EFGH$ 为矩形的充要条件是 A、B、C、D 四点共圆.

7. 令 $y_i=\frac{1}{1+x_i}$, $i=1,2,\cdots,5$, 则 $x_i=\frac{1-y_i}{y_i}$, $i=1,2,\cdots,5$, 且 $\sum_{i=1}^{5}y_i=1$. 于是,

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\le 1\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{-y_i^2+y_i}{5y_i^2-2y_i+1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{-5y_i^2+5y_i}{5y_i^2-2y_i+1}\le 5$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\left(-1+\frac{3y_i+1}{5y_i^2-2y_i+1}\right)\le 5$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{5\left(y_i-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\le 10.$$

而 $$\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{5\left(y_i-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}\le\sum_{i=1}^{5}\frac{3y_i+1}{\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{5}{4}\sum_{i=1}^{5}(3y_i+1)=\frac{5}{4}\times(3+5)=10,$$

故命题成立.

8. 设第 i 行的男生数为 a_i, 则女生数为 $75-a_i$. 依题意可知

$$\sum_{i=1}^{22}\left(C_{a_i}^2+C_{75-a_i}^2\right)\le 11\times C_{75}^2.$$

这是因为任意给定的两列处于同一行的两个人中, 性别相同的学生不超过 11 对, 故所有同一行中性别相同的两人对的个数不大于 $11\times C_{75}^2$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{22}\left(a_i^2-75a_i\right)\le -30\,525,$$

即 $$\sum_{i=1}^{22}(2a_i-75)^2\le 1\,650.$$

利用柯西不等式, 可知

$$\left[\sum_{i=1}^{22}(2a_i-75)\right]^2\le 22\sum_{i=1}^{22}(2a_i-75)^2\le 36\,300.$$

所以, $\sum_{i=1}^{22}(2a_i-75)<191$.

从而, $\sum_{i=1}^{22}a_i<\frac{191+1\,650}{2}<921$.

因此, 男生的个数不超过 928.

(2003 西部数学奥林匹克命题组 提供)