国外数学竞赛中几道平面几何问题的解读与欣赏

湖南理工学院 萧振纲

由于平面几何鲜明的直觉性和严谨的逻辑性，并且平面几何中经常出现一些极具挑战性的问题，将这些问题作为数学竞赛题是再好不过了，能在很大程度上发挥数学竞赛(或数学奥林匹克)的选拔功能，因而世界各国都不约而同地将平面几何作为本国中学生数学竞赛中必不可少的内容.

一道好的数学竞赛题往往是在很好地发挥其选拔功能后能让人回味无穷，或给予方法的启迪，或具有深刻的背景，能给予数学美的享受，极具数学欣赏价值. 这种数学欣赏价值就是：简单而不平凡. 而在国外的一些数学竞赛中，不乏条件简单而结论不平凡的平面几何问题(当然，国内也不例外). 这里摘取近几年国外数学竞赛(包括 IMO)中出现的几道平面几何问题进行解读，并从中感受平面几何的无穷魅力，欣赏平面几何的无穷奥妙.

问题 1 如图 1，设一个圆通过$\triangle ABC$的顶点B、C，且分别交AB、AC于点D、E. 弧三角形ADE的内切圆Γ切弧DE于点M. 证明：$\angle BMC$的角平分线过$\triangle ABC$的内心. (1999，伊朗数学奥林匹克)

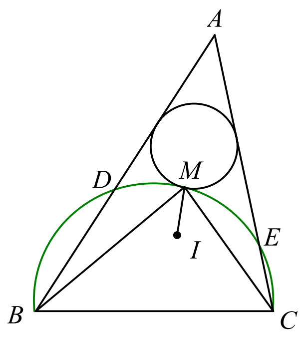

图 1

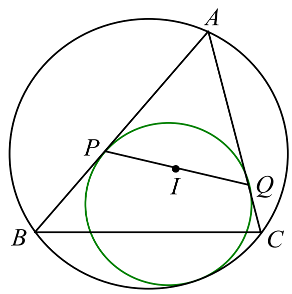

图 2

这类曲边三角形的内切圆问题在此之前，我们仅知道一个结果，即

Mannheim定理 一圆分别切$\triangle ABC$的两边AB、AC于P、Q，且与$\triangle ABC$的外

接圆也相切，则△ABC的内心为PQ的中点. （见图 2）

这使我们考虑到可以将问题更一般地叙述为:

设一个圆与△ABC 的边 AB、AC 均相切，且与过 B、C 两点的一段圆弧相切于 D，再设△ABC 的内心为 I，则 ID 平分∠BDC.(图 2，图 3)

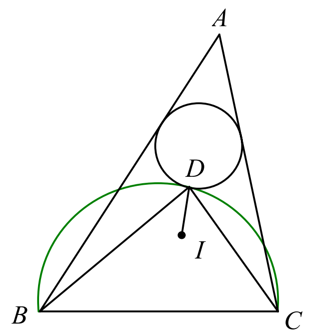

图　3

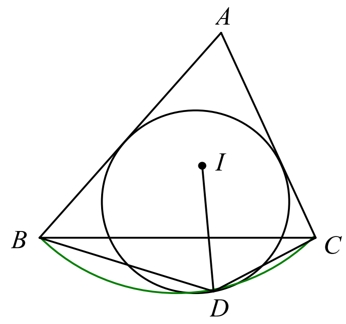

图　4

直接证明这个问题似乎找不到突破口，下面给出一个比较简单的间接证明.

我们先证明另一个问题:

设 E、F 分别为△ABC 的边 AB、AC 上的点，且 AE=AF, I 是△ABC 的内心, D 为△EBI 的外接圆与△FIC 的外接圆的另一交点，则△DEF 的外接圆分别与 AB、AC 相切于 E、F，且△DBC 的外接圆与△DEF 的外接圆相切于 D.

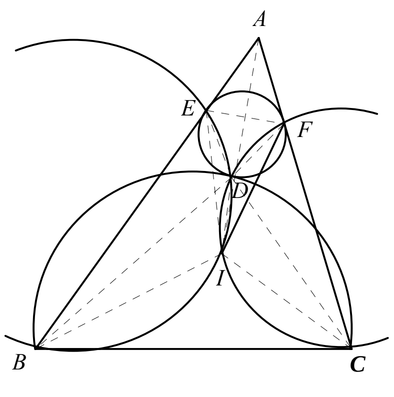

图　5

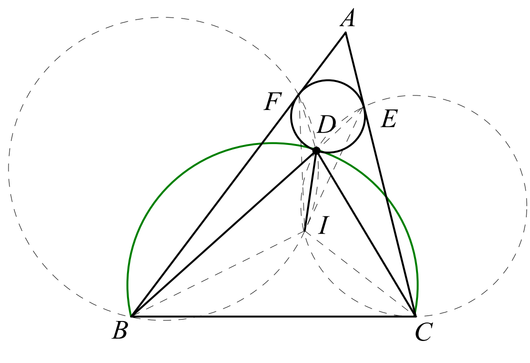

图　6

事实上 ,如图 5，显然有$\angle FDE=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90°-\dfrac{A}{2}=\angle AFE=\angle FEA$，所以，△$DEF$的外接圆分别与$AB$、$AC$相切于$E$、$F$. 又

$$\angle EDB=\angle EIB=\angle AIB-\angle AIE=90°+\frac{C}{2}-(\angle BEI-\frac{A}{2})$$

$$=(90°+\frac{A}{2})-\angle BEI+\angle ICB=\angle EFC-\angle BEI+\angle DCB-\angle DCI.$$

而 $\angle BEI=\angle IFC$, $\angle EFC-\angle IFC-\angle DFI=\angle EFD$, 所以

$$\angle EDB=\angle EFD+\angle DCB.$$

于是，过D作△DEF的外接圆的切线，则由所证等式即知这条切线也是△DBC的外接圆在点D处的切线，故△DBC的外接圆与△DEF的外接圆相切于点D.

这就不难证明问题 1 了. (参见图 6，略)

注 1: 2002 年伊朗数学奥林匹克有这么一道平面几何题:

设一圆与△ABC的边AB、AC都相切，且与△ABC的外接圆相切于T， D是$\overset{\frown}{BAC}$ 的中点, I为△ABC的内心，求证: T、I、D三点在一直线上.

从问题 1 的情形来看，这个结论是显然的. 但这道题至少有三种直接证明(只不过每一个证明均用到了Mannheim定理).

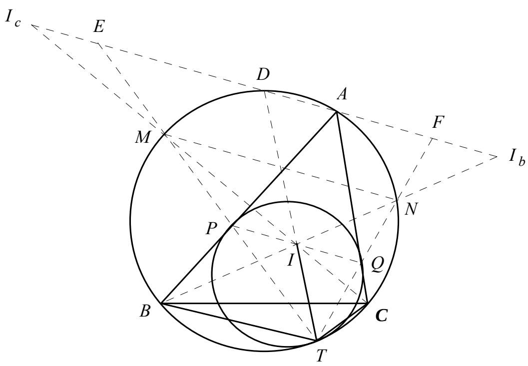

图 7

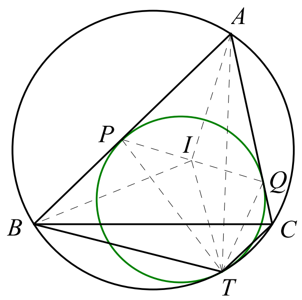

图 8

证法 1 如图 7，设所述小圆分别切AB、AC于P、Q，则由Mannheim定理，I为PQ的中点. 设△ABC的B-旁心和C-旁心分别为I_b、I_c，则I_b、D、I_c都在$\angle BAC$的外角平分线上，且D为线段I_bI_c的中点. 再设直线TP、IQ分别△ABC的外接圆于另一点M、N，交I_bI_c于E、F，则M为$\overset{\frown}{AB}$ (不含点C)的中点, N为$\overset{\frown}{AC}$（不含点B）的中点, 所以, M在直线CI_c上, N在直线BI_b上. 连接MN，则MN∥PQ∥EF，于是

$$\frac{I_cE}{PI}=\frac{EM}{MP}=\frac{FN}{NP}=\frac{FI_b}{IQ}.$$

因$PI=IQ$，所以, $I_cE=FI_b$，从而D为EF的中点，再注意I为PQ的中点即知T、I、D三点共线.

证法 2 如图 8, 由Mannheim定理, I为PQ的中点. 又TP平分$\angle ATB$, $\angle ATB=\angle ACB$, 所以$\angle PIB=\angle AIB-90°=\frac{1}{2}\angle ACB=\angle PTB$. 因此, P、B、T、I四点共圆, 从而$\angle ITB=\angle IPA$. 同理, $\angle CTI=\angle AQI$, 但由对称性, 有$\angle IPA=\angle AQI$, 于是, $\angle ITB=\angle CTI$, 即TI平分$\angle BTC$.

证法 3 仍见图 8, 由Mannheim定理, I为PQ的中点, 而AP、AQ为切线, 所以TA、TI为$\angle QTP$的两条等角线, 即有$\angle QTA=\angle ITP$, $\angle QTI=\angle ATP$.又$\angle CTQ=\angle QTA$, $\angle ATP=\angle PTB$, 所以

$$\angle CTI=\angle CTQ+\angle QTI=\angle QTA+\angle ATP=\angle ITP+\angle PTB=\angle ITB.$$

即TI平分$\angle BIC$.

注 2 上海钟建国老师曾在网上发帖给出了问题 1 的另一个富有启发性的间接证明. 但我们至今没有找到问题 1 的直接证明. 从伊朗 2002 年的那道题的几个直接证明来看, 欲找出问题 1 的直接证明, 或许先要找到Mannheim定理的推广方有可能.

问题 2 如图 9, 设 P 为$\triangle ABC$ 的外接圆上一点, 过 P 作 BC、CA 的垂线, 垂足分别为 D、E, L、M 分别为 AD、BE 的中点, 求证: $DE\perp LM$. (2003, 伊朗数学奥林匹克)

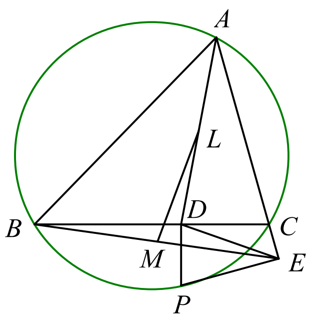

图 9

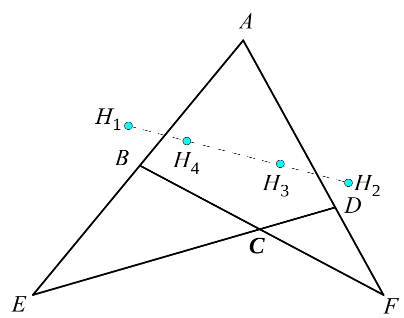

图 10

一看便知本题与著名的 Simson 线有关, 似乎只用 Simson 定理就能简单解决, 其实不然, 它还涉及到另外两个著名的几何定理和 Simson 线的一个性质:

Newton 定理 完全四边形的三条对角线的中点在一条直线上. 这条直线称为完全四边形的 Newton 线;

Steiner 定理 完全四边形的四个三角形的垂心在一条直线上. 这条直线称为完全四边形的 Steiner 线. 完全四边形的 Steiner 线与 Newton 线互相垂直.(图 10)

Simson 线的一个**性质**：三角形的外接圆上任意一点 P 与三角形的垂心的连线被点 P 关于三角形的 Simson 线平分；（图 11）

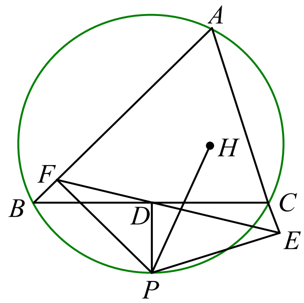

图　11

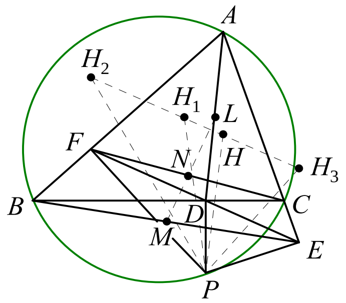

图　12

这样，如图 12，设点P在直线AB上的射影为F，则D、E、F在一直线上，考虑完全四边形$AFDCBE$，设$\triangle ABC$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$的垂心分别为H、H_1、H_2、H_3, N为CF的中点，则H、H_1、H_2、H_3 在一直线上, L、M、N在一直线上，且这两条直线互相垂直. 因点P同时在$\triangle ABC$、$\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CDE$的外接圆上，且点P关于这四个三角形的Simson线皆为直线DEF，而PH、PH_1、PH_2、PH_3均被直线DEF平分，所以，直线DEF平行于完全四边形$AFDCBE$的Steiner线，故$DE\perp LM$.

问题 3 设$\triangle ABC$与$\triangle PQR$满足下列条件: A、P 分别是 QR 与 BC 的中点, QR、BC 分别平分$\angle BAC$与$\angle QPR$. 求证: $AB+AC=PQ+PR$.（2001，日本数学奥林匹克）

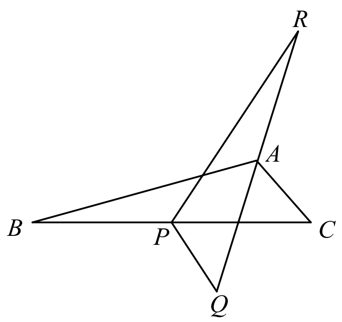

图　13

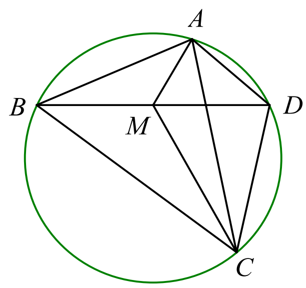

图　14

本题的条件也好、所对应的图形（图 13）也好，都很简单，但这绝非一个简单问题. 实际上，本题的背景是调和四边形——对边乘积相等的圆内接四边形.

过圆外一点作圆的两条切线和一条割线，则两个切点和割线与圆的两个交点正好是一个调和四边形的四个顶点. 如果调和四边形不是轴对称图形，则这个条

件既是充分的，也必要的.

调和四边形有一个很好的**特征性质**：

设 M 是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 的中点，则四边形 $ABCD$ 为一个调和四边形的充分必要条件是 BD 平分 $\angle AMC$. (图 14、图 15)

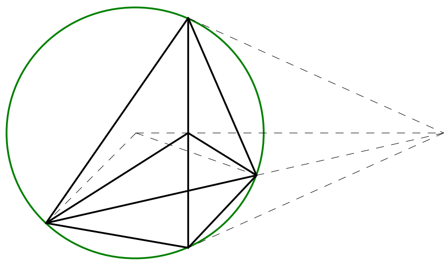

图　15

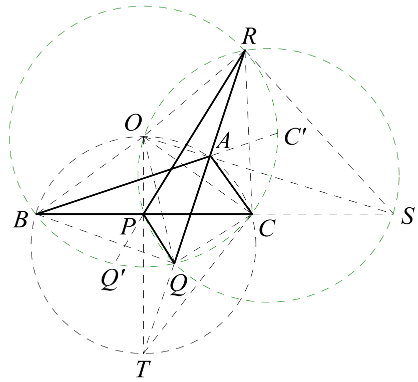

图　16

如果了解了调和四边形的这一性质，则对于本题来说，落墨就会从证明 B、C、Q、R 四点共圆开始. 只不过这个证明颇费周折.

证明 如图 16，设BC的垂直平分线与QR的垂直平分线交于点O，则$OB=OC$，$OQ=OR$. 因OA是$\angle BAC$的外角平分线，所以点O在$\triangle ABC$的外接圆上，且O为$\overset{\frown}{BAC}$的中点. 同理，点O在$\triangle PQR$的外接圆上，且O为$\overset{\frown}{QPR}$的中点. 设直线OA与BC交于S，OP与QR交于T，则S为$\triangle PQR$的外接圆上的$\overset{\frown}{QR}$(不含点P)的中点，所以，OS为$\triangle PQR$的外接圆的直径. 同理，OT为$\triangle ABC$的外接圆的直径. 因$OC\perp CT$，$CP\perp OT$，所以，$OC^2=OP\cdot OT$；同理，$OR^2=OA\cdot OS$. 但由$OS\perp RT$，$OT\perp BS$知P、A、S、T四点共圆，所以$OP\cdot OT=OA\cdot OS$. 因此$OC^2=OR^2$，从而$OC=OR$. 即有$OB=OC=OR=OQ$. 这说明B、C、Q、R四点共圆.

现在，设点 C 关于直线 OA 的对称点为 C'，点 Q 关于直线 OP 的对称点为 Q'，则 C'在 BA 的延长线上，Q'在 RP 的延长线上，C'、Q'皆在$\odot O$ 上，$AC'=AC$，$PQ'=PQ$. $\overset{\frown}{BQ'}=\overset{\frown}{QC}=\overset{\frown}{C'R}$，于是，$\overset{\frown}{BQ'C'}=\overset{\frown}{Q'C'R}$，从而 $BC'=RQ'$. 而

$$BC'=AB+AC'=AB+AC,\ RQ'=PR+PQ'=PR+PQ.$$

故　$AB+AC=PQ+PR$.

问题 4 设L、M、N分别为$\triangle ABC$的三条高AD、BE、CF的中点，$\triangle ABC$的内切

圆与其边BC、CA、AB分别切于X、Y、Z, 则LX、MY、NZ三线共点. 记此点为P, 进而证明点P在△ABC的外心与内心的连线上. （第 44 届(2003)IMO越南选拔赛）(见图 17)

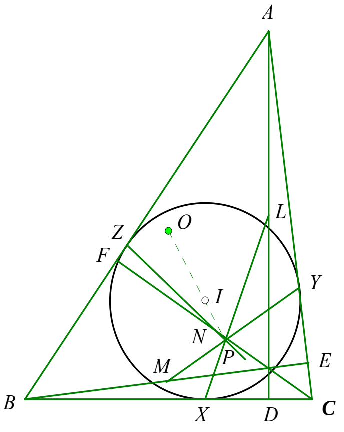

图 17

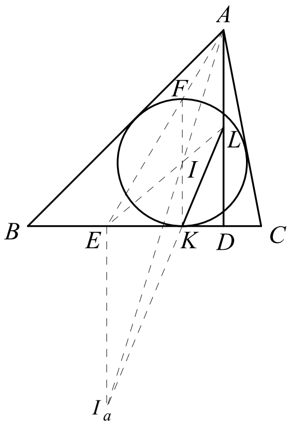

图 18

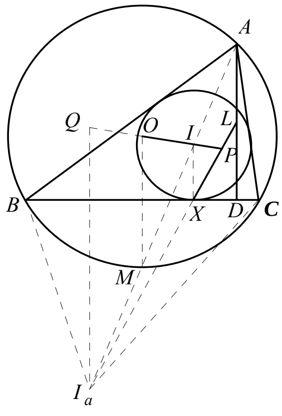

图 19

问题的困难之处在于我们似乎无法将其化为一个已知的共点或共线问题, Menelaus 定理与 Ceva 定理以及位似变换又都用不上, 于是, 我们只能采取证明三点共线或三线共点的一些其他方法来尝试. 实际上, 本题的关键是先要证明欲证的共点三直线中, 每一条都过三角形的一个旁心.

引理 设K为△ABC的内切圆与BC边的交点, L为△ABC的高AD的中点, 则△ABC的A-旁心I_a在直线KL上.

证明 如图 18, 设E为△ABC的A-旁切圆与BC边的切点, F为△ABC的内切圆上点K的对径点, 则A、E、F在一直线上. 显然, $EI_a // FK // AD$. 因L为AD的中点, 所以, EL过△ABC的内心I, 又A、I、I_a在一直线上, 于是

$$\frac{I_aE}{LD}=\frac{I_aE}{AL}=\frac{EI}{IL}=\frac{EK}{KD}.$$

由此即知, I_a、K、L三点共线, 即△ABC的A-旁心I_a在直线MK上.

这样, 如图 19, 由引理, △ABC的A-旁心I_a在直线LX上. 设△ABC的外心与内心分别为O、I, 外接圆半径与内切圆半径分别为R、r, 直线LX交直线OI于点P, II_a与△ABC的外接圆交于M, 则$OM\perp BC$, 且M为II_a的中点. 显然, 点P在OI的延长线上. 再过点I_a作OM的平行线交直线OI于Q, 则QI_a=2OM=2R. 于是

$$\frac{PI}{PQ}=\frac{IX}{QI_a}=\frac{r}{2R}.$$

所以

$$\frac{PI}{2OI}=\frac{PI}{IQ}=\frac{r}{2R-r}.$$

从而有

$$PI=\frac{2r\cdot OI}{2R-r}.$$

最后的等式说明：点P是直线OI上的一个定点．换句话说，直线LX通过直线OI上的一个定点P；同样，直线MY、NZ也过直线OI上的这个定点P．故直线LX、MY、NZ三线共点P．并且点P在$\triangle ABC$的外心与内心的连线上．

问题 5 在凸四边形$ABCD$中，$AB=CD$，AB与CD不平行．动点E、F分别在边AB、CD上，满足条件$AE=CF$．再设对角线AC与BD交于P，直线EF与AC、BD分别交于Q、R．求证：当E、F分别在AB、CD上变动时，所有$\triangle PQR$的外接圆周除了P外还有一个公共点．（第 46 届IMO）

本题必须先找出那个公共点，其关键是将 AB 和 CD 这两条线段看成真正(顺)合同图形，由于 AB 与 CD 不平行．所以，这个真正合同所对应的几何变换是旋转变换，而 E 与 F 恰好为两个旋转对应点，它们有一个旋转中心，这个旋转中心正是我们要找的另一个公共点．下面将相等的条件去掉，证明这个问题的推广：

问题 5' 在凸四边形$ABCD$中，AB与CD不平行．动点E、F分别在边AB、CD上，满足条件$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$．再设对角线$AC$与$BD$交于$P$，直线$EF$与$AC$、$BD$分别交于$Q$、$R$．求证：当$E$、$F$分别在$AB$、$CD$上变动时，所有$\triangle PQR$的外接圆周除了$P$外还有一个公共点．

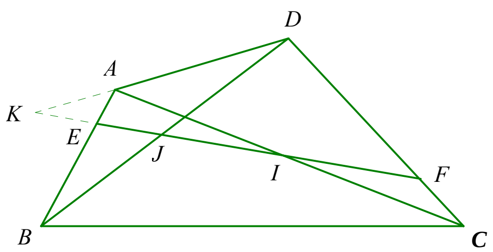

图 20

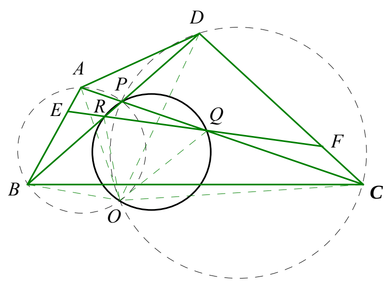

图 21

引理 设 EF 分别为四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 CD 上的点，直线 EF 分别与 AC 和 BD 交于 I、J，则$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}$的充分必要条件是：$\frac{AI}{IC}=\frac{BJ}{JD}$.

事实上，如果 $BC /\!/ EF /\!/ AD$，则 $ABCD$ 为梯形,于是 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD} \Leftrightarrow EF$ 分别为 AB 和 CD 的中点$\Leftrightarrow I$、J 分别为 AC、BD 的中点$\Leftrightarrow \frac{AI}{IC}=\frac{BJ}{JD}$.

如果 BC 与 AD 不平行，则直线 AD 与 BC 中至少有一条与 EF 相交，不妨设 AD 与 EF 交于 K，如图 20，考虑$\triangle ABD$ 与截线 EJK，$\triangle ACD$ 与截线 FIK，由 Menelaus 定理，有

$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BJ}{JD}\cdot\frac{DK}{KA}=1=\frac{CF}{FD}\cdot\frac{DK}{KA}\cdot\frac{AI}{IC}.$$

所以，$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BJ}{JD}=\frac{CF}{FD}\cdot\frac{AI}{IC}$. 故 $\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FD}\Leftrightarrow\frac{AI}{IC}=\frac{BJ}{JD}$.

再证本题(推广情形). 如图 21，设$\triangle PAB$ 与$\triangle PCD$ 的外接圆交于 P、O 两点，易知$\triangle OAC \backsim \triangle OBD$，由引理,$\triangle OAQ \backsim \triangle OBR$，所以$\angle AQO=\angle BRO$，因此, O、R、P、Q 四点共圆，这说明点 O 在$\triangle PQR$ 的外接圆上. 但 AB 与 CD 不平行，所以 $O\neq P$. 即所有$\triangle PQR$ 的外接圆周除了点 P 外还有一个公共点 O.

这个证明本质上就是将线段 AB 与 CD 看成顺相似图形时，E、F 为一对顺相似对应点, O 为它们的顺相似中心. 将线段 BD 与 AC 也看成顺相似图形时, R、Q 为一对顺相似对应点，其顺相似中心也为点 O.