竞赛之窗

2014 年北京市中学生数学竞赛预赛(高一)

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2014)08-0022-03

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设 P 是素数集合,H 是合数集合. 定义

$$I(n)=\begin{cases}1, & n\in P;\\ 0, & n\in H.\end{cases}$$

下面三个命题:

①对任意 x、$y\in P$,均有 $I(x+y)=0$;

②对任意 x、$y\in H$,均有 $I(x+y)=0$;

③对 $x\in P$,$y\in H$,均有 $I(x+y)=0$

中,真命题有(　　)个.

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

2. 在平面直角坐标系 xOy 中,函数 $y=\frac{1}{2x}$ 图像上的动点 P 与坐标原点 O 的距离的最小值为(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C)1　(D)$\sqrt{2}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=AC$,D 是 AC 上一点,且 $AD=BD=BC$. 则 $\cos\angle BAC=$(　　).

(A)$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(C)$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　(D)$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

4. 一串数

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,…

的构成规律是:第一个数和第二个数均是 1,从第三个数起,每一个数均等于其前面紧邻的两个数之和. 则这串数中的第 2 014 个数被 7 除的余数为(　　).

(A)0　(B)2　(C)4　(D)6

5. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$. 若对任意实数 x、y,均满足方程

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy,$$

则 $f(201)=$(　　).

(A)40 400　(B)40 401

(C)40 402　(D)40 403

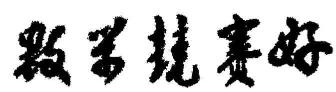
6. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$. 则 $f(x)$ 的值域为(　　).

(A)$\left[-1,\frac{5}{3}\right]$　(B)$\left[-\frac{1}{3},5\right]$

(C)$\left[-\frac{5}{3},1\right]$　(D)$\left[-5,\frac{1}{3}\right]$

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 下面是我国著名数学家王元院士的题词:



若不同的汉字代表 0~9 中的不同数字,假设"数学竞赛好"表示的是不同数字组成的五位数中最大的平方数. 则此五位数为______.

2. 若实数 x 满足 $\log_2\log_2 x=\log_4\log_4 x$,则 $x=$______.

3. 如图 1,已知正方形 $ABCD$ 的边长为 5,E、F 为正方形外的两点,$BE=DF=4$,$AE=CF=3$. 则 $EF=$______.

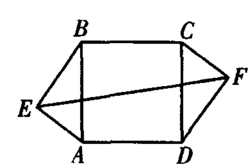


图 1

4. 试确定不超过 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$ 的最大整数为______.

5. 如图 2,在四边形 $ABCD$ 中,已知 $\angle ACB=\angle ADB=90°$,$AC$ 与 BD 交于点 E,$AC=BC$,$AD=4$,$BD=7$. 则 $S_{\triangle AEB}=$______.

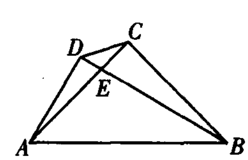


图 2

6. 在立方体的每个面上各写一个正整数,在每个顶点处写该顶点所在的三个面上的正整数的乘积. 若八个顶点写的数之和为 2 014,则六个面

上写的数之和为______.

7. 已知 A、B 为集合 $\{0,1,\cdots,9\}$ 中的数字，r 为两位整数 $\overline{AB}$，s 为两位整数 $\overline{BA}$，r、$s\in\{00,01,\cdots,99\}$. 当 $|r-s|=k^2$（k 为整数）时，有序数对 (A,B) 的个数为______.

8. 已知 P 是边长为 $6\sqrt{3}$ 的正 $\triangle ABC$ 的内切圆上的一个动点. 则 $BP+\frac{1}{2}PC$ 的最小值为______.

参考答案

一、**1.** A.

若 $x=2,y=5$，得 $x+y=7$，则

$I(x+y)=I(7)=1\neq0$，

故命题①不真；

若 $x=4,y=9$，得 $x+y=13$，则

$I(x+y)=I(13)=1\neq0$，

故命题②不真；

若 $x=3,y=8$，得 $x+y=11$，则

$I(x+y)=I(11)=1\neq0$，

故命题③不真.

综上，真命题有 0 个.

2. C.

根据对称性，只需考虑 $x>0$ 的情形即可.

设动点为 $P(x,y)$. 则 $xy=\frac{1}{2}$.

又 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(x-y)^2+1$，于是，当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，x^2+y^2 取得最小值 1，此时，$OP=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 1.

3. C.

如图 3，设 $AB=AC=1$，$AD=BD=BC=a$. 则

$CD=1-a$.

易知，

$\triangle ABC\backsim\triangle BCD$

$\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a}$

$\Rightarrow a^2=1-a$

$\Rightarrow a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（负值舍去）.

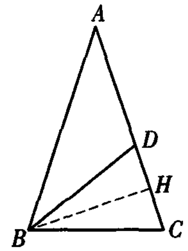


图 3

作 $BH\perp CD$ 于点 H. 则

$CH=DH=\frac{1}{2}(1-a)=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

又 $AH=1-CH=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，故

$\cos\angle BAC=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

4. D.

设这串数为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，其构成规律为

$a_1=a_2=1,a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3)$.

考虑这些数被 7 除的余数列为

1，1，2，3，5，1，6，0，6，6，5，4，2，6，1，0，1，1….

观察余数列第 17 个数和第 18 个数分别与第 1 个数和第 2 个数相同，循环出现.

注意到，$2\,014=125\times16+14$.

从而，所求结果为 6.

5. B.

在题给方程中令 $x=y$，得

$f(0)=f(x)+f(x)-2x^2$

$\Rightarrow f(x)=x^2+\frac{a}{2}(f(0)=a)$.

再取 $x=y=0$，得

$a=2a\Rightarrow a=0$.

经检验，$f(x)=x^2$ 满足方程.

因此，$f(201)=40\,401$.

6. B.

注意到，$x^2-x+1>0$.

于是，$f(x)$ 的定义域为全体实数.

记 $y=\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}$. 则

$y(x^2-x+1)=x^2+3x+1$

$\Rightarrow(y-1)x^2-(y+3)x+(y-1)=0$.

若二次项系数 $y-1=0$，则 $x=0$.

若二次项系数 $y-1\neq0$，则

$\Delta=(y+3)^2-4(y-1)^2\geqslant0$

$\Rightarrow3y^2-14y-5\leqslant0$

$\Rightarrow y\in\left[-\frac{1}{3},5\right]$.

所以，$f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{3},5\right]$.

二、**1.** 96 721.

注意到，$300^2=90\,000,310^2=96\,100$，

$320^2=102\,400>100\,000$.

于是，这个不同数字的五位数可能在 $310^2\sim320^2$ 之间的九个平方数中.

又 $311^2=96\ 721, 312^2=97\ 344, 313^2=97\ 969$,

$314^2=98\ 596, 315^2=99\ 225, 316^2=99\ 856$,

$317^2=100\ 489>100\ 000$,

故不同数字的五位数中最大的平方数为 96 721.

2. $\sqrt{2}$.

设 $y=\log_a\log_a x$. 则 $a^{a^y}=x$.

令 $a=2$ 和 $a=4$. 由题意知

$2^{2^y}=4^{4^y}=(2^2)^{(2^2)^y}=2^{2^{2y+1}}$

$\Rightarrow y=2y+1 \Rightarrow y=-1$

$\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

3. $7\sqrt{2}$.

易知, $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$.

延长 EA、FD 交于点 G.

由 $\angle ADG=90^\circ-\angle CDF=\angle DCF=\angle BAE$,

$\angle DAG=90^\circ-\angle BAE=\angle ABE$,

知 $\triangle AGD\cong\triangle BEA$.

于是, $EG=FG=7$.

从而, $EF=7\sqrt{2}$.

4. 3.

注意到,

$$\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}=\frac{(\sqrt{14}+2)^2}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)}$$

$$=\frac{14+4+4\sqrt{14}}{14-4}=\frac{18+4\sqrt{14}}{10}.$$

而 $3<\sqrt{14}<4$, 于是, $30<18+4\sqrt{14}<34$.

从而, $3<\frac{18+4\sqrt{14}}{10}<3.4$.

因此, 不超过 $\frac{\sqrt{14}+2}{\sqrt{14}-2}$ 的最大整数为 $=3$.

5. $11\frac{9}{11}$.

由题意知 A、B、C、D 四点共圆, 且

$\angle CBD=\angle CAD$,

$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle CBA=45^\circ$.

以 C 为中心旋转 $\triangle BCD$, 使点 B 与 A 重合, 则 BD 落在 AD 上, 得 $\triangle ACF$.

于是, $AF=7$, $DF=7-4=3$,

$\angle FDC=\angle ABC=45^\circ$.

过点 C 作 $CH\perp DF$ 于点 H. 则

$CH=\frac{1}{2}DF=\frac{3}{2}$.

从而, $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$.

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\times(4^2+7^2)=\frac{65}{4}$, 故

$$\frac{DE}{EB}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3}{\frac{65}{4}}=\frac{12}{65}\Rightarrow\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABE}}=\frac{DB}{EB}=\frac{77}{65}.$$

又 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times4\times7=14$, 于是,

$$S_{\triangle ABE}=\frac{14\times65}{77}=\frac{910}{77}=11\frac{9}{11}.$$

6. 74.

如图 4, 设在立方体相对的两个面上写的正整数对分别为 (a,b), (c,d), (e,f).

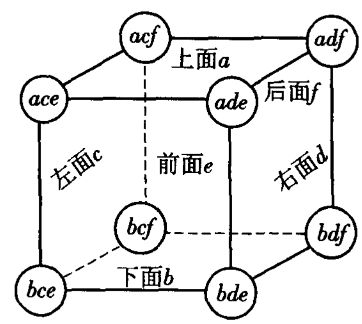


图 4

则在各顶点处写的数之和为

$acf+adf+ace+ade+bcf+bce+bdf+bde$

$=(a+b)(c+d)(e+f)$

$=2\ 014=2\times19\times53$.

从而, 在各面上写的数之和为

$(a+b)+(c+d)+(e+f)$

$=2+19+53=74$.

7. 42.

注意到,

$|(10A+B)-(10B+A)|=9|A-B|=k^2$.

则 $|A-B|$ 为完全平方数.

当 $|A-B|=0$ 时, 有 10 个整数对:

$(A,B)=(0,0),(1,1),\cdots,(9,9)$;

当 $|A-B|=1$ 时, 有 18 个整数对:

$(A,B)=(0,1),(1,2),\cdots,(8,9)$,

及它们的逆序数;

当 $|A-B|=4$ 时, 有 12 个整数对:

$(A,B)=(0,4),(1,5),\cdots,(5,9)$,

及它们的逆序数;

当 $|A-B|=9$ 时, 有 2 个整数对:

$(A,B)=(0,9)$,

及其逆序数.

2014 年全国高中数学联赛四川赛区预赛

中图分类号:G424.79　　文献标识码:A　　文章编号:1005-6416(2014)08-0025-05

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 设 a、$b \in \mathbf{R}$,复数 $z=a+4\mathrm{i}$,且 $\frac{z}{z+b}=4\mathrm{i}$. 则 $b=$(　　).

(A) -16　　(B) 1　　(C) 16　　(D) 17

2. 过椭圆的左焦点 F 作倾斜角为 $45°$ 的直线 l 与该椭圆交于 A、B 两点. 若 $|BF|=2|AF|$,则该椭圆的离心率为(　　).

(A) $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 已知公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $d>0$,且 a_2 是 a_1、a_4 的等比中项. 记 $b_n=a_{2^n}(n \in \mathbf{Z}_+)$,对任意的正整数 n 均有

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<2.$$

则公差 d 的取值范围是(　　).

(A) $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　(B) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

(C) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　(D) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

4. 已知 a、b 为正实数,记

$$P=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2},\ Q=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab},$$

$$R=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}.$$

则下列判断正确的是(　　).

(A) $P \geqslant Q \geqslant R$　　(B) $Q \geqslant P \geqslant R$

(C) $Q \geqslant R \geqslant P$

(D) P、Q、R 的大小关系不能确定

5. 已知一个半径为 6 的球. 则该球内接正三棱锥的体积的最大值为(　　).

从而,满足条件的有序数对个数为

$10+18+12+2=42$.

8. $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

如图 5,设△ABC 内切圆为⊙O,取 OC 上的点 M,使 $OM=\frac{1}{4}OC$.

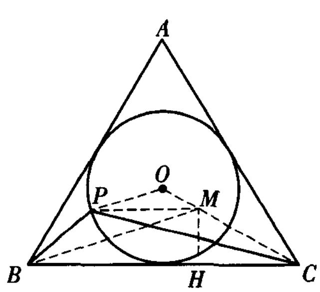


图 5

由正△ABC 的边长为 $6\sqrt{3}$,知

$OC=6, OP=3, OM=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{OM}{OP}=\frac{OP}{OC}=\frac{1}{2} \Rightarrow \triangle OPM \backsim \triangle OCP$

$\Rightarrow \frac{PM}{PC}=\frac{OM}{OP}=\frac{1}{2} \Rightarrow PM=\frac{1}{2}PC.$

注意到,$PB+\frac{1}{2}PC=PB+PM \geqslant BM.$

过点 M 作 $MH \perp BC$ 于点 H. 则

$MH=\frac{1}{2}MC=\frac{1}{2}(OC-OM)=\frac{9}{4}$,

$BH=BC-CH=6\sqrt{3}-\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

故 $BM=\sqrt{\left(\frac{15\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{756}}{4}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

因此,$BP+\frac{1}{2}PC=PB+PM \geqslant BM=\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

当动点 P 为 BM 与内切圆的交点时,得到最小值 $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

(李延林　提供)