●数学活动课程讲座 ●

初中数学竞赛中的概率问题

邹 守 文

(安徽省南陵县实验中学 ,241300)

(本讲适合初中)

概率是课程标准新增加的内容之一,在近两年的初中数学竞赛中,也是一个重要的考点.

例1 一项"过关游戏"规定:在第 n 关要掷一颗骰子 n 次,如果这 n 次抛掷所出现的点数之和大于 $\frac{3^n}{4}$,则算过关;否则,不算过关.现有下列说法:

①过第一关是必然事件;

②过第二关的概率是 $\frac{35}{36}$;

③可以过第四关;

④过第五关的概率大于零.

其中,正确说法的个数为( ).

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

(2008,全国初中数学联赛天津赛区初赛)

讲解:要过第一关,点数需大于 $\frac{3}{4}$,显然,抛掷一颗骰子至少有一点,故①对.

要过第二关,点数之和需大于 $\frac{9}{4}$,即点数之和至少是 3.而抛掷两次的点数之和至少为 2,因此,不能过第二关的只有一种可能:两次抛掷的点数都是 1,即两次抛掷的 36 种可能中,有 35 种结果可以通过第二关.所以,过第二关的概率为 $\frac{35}{36}$.故②对.

要过第四关,点数之和需大于 $\frac{3^4}{4}=20\frac{1}{4}$.若每次抛掷的点数均为 6,则点数之和为 24,大于 $20\frac{1}{4}$.所以,第四关是可以通过的.故③对.

要过第五关,点数之和需大于 $\frac{3^5}{4}$.显然,这是不可能的,所以,过第五关是不可能事件,概率为 0.故④错.

注:本题是关于概率概念的基础题,关键在于正确理解闯关的含义.

例2 用红、蓝、黄三色将图 1 中区域 A、B、C、D 染色,要求有公共边界的相邻区域不能染成相同的颜色.则满足区域 A 恰好染成蓝色的概率是______.

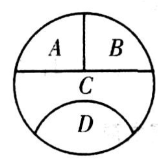

图 1

(2007,江苏省初中数学竞赛(初三第二试))

讲解:解本题需用列举法列出所有可能情形,如图 2.

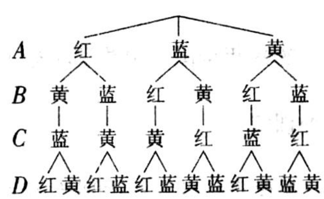

图 2

由图 2 知共有 12 种情形,其中 A 染成蓝色的共有 4 种情形,故概率为 $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

注:本题若从整体考虑,A 中有红、黄、蓝

收稿日期:2008 - 05 - 05 修回日期:2008 - 07 - 16

三种染色方法,且染成每种颜色的机会均等,故 A 染成蓝色的概率为$\frac{1}{3}$.

例3　六个面上分别标有1,1,2,3,3,5六个数字的均匀立方体表面如图3所示.掷这个立方体一次,记朝上一面的数为平面直角坐标系中某个点的横坐标,朝下一面的数为该点的纵坐标.按照这样的规定,每掷一次该立方体,就能得到平面内的一个点的坐标.已知小明前两次掷得的两个点能确定一条直线 l,且这条直线 l 经过点(4,7).那么,他第三次掷得的点也在这条直线上的概率是(　　).

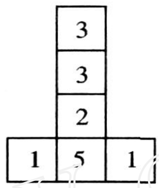

图3

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{1}{6}$

(2007,全国初中数学联赛浙江赛区初赛)

讲解:每掷一次可能得到六个点的坐标是(其中有两个点是重合的):

(1,1),(1,1),(2,3),(3,2),(3,5),(5,3).

通过描点和计算可以发现,经过(1,1)、(2,3)、(3,5)三点中的任意两点所确定的直线都经过点 $P(4,7)$.故小明第三次掷得的点也在直线 l 上的概率是$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

注:解本题的关键在于列出所有点的坐标,通过画图确定一次函数的解析式.

例4　把一颗六个面编号分别为1,2,3,4,5,6质地均匀的正方体骰子先后投掷2次.若两个正面朝上的编号分别为 m、n,则二次函数 $y=x^2+mx+n$ 的图像与 x 轴有两个不同交点的概率是(　　).

(A) $\frac{5}{12}$　(B) $\frac{4}{9}$　(C) $\frac{17}{36}$　(D) $\frac{1}{2}$

(2008,《数学周报》杯全国初中数学竞赛)

讲解:基本事件总数有 $6\times6=36$,即可以得到36个二次函数.利用一元二次方程根的判别式 $\Delta=b^2-4ac=m^2-4n>0$,知 $m^2>4n$.通过枚举法知,满足条件的 m、n 有17对,故 $P=\frac{17}{36}$.

例5　如图4,将3枚相同硬币依次放入一个 4×4 的正方形格子中(每个正方形格子只能放1枚硬币).求所放的3枚硬币中,任意两枚都不同行且不同列的概率.

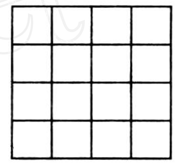
图4

(2008,全国初中数学联赛四川初赛)

讲解:(1)计算总的放法数 n:第一枚硬币放入16个格子有16种放法;第二枚硬币放入剩下的15个格子有15种放法;第三枚硬币放入剩下的14个格子有14种放法.

所以,总的放法数

$n=16\times15\times14=3\ 360$.

(2)计算满足题目要求的放法数 m:第一枚硬币放入16个格子有16种放法,与它不同行且不同列的格子有9个.因此,与第一枚硬币不同行且不同列的第二枚硬币有9种放法.与前两枚硬币不同行且不同列的格子有4个,第三枚硬币放入剩下的4个格子有4种放法.

所以,满足题目要求的放法数

$m=16\times9\times4=576$.

故所求概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{16\times9\times4}{16\times15\times14}=\frac{6}{35}$.

例6　某广场地面铺满了边长为36 cm的正六边形地砖.现在向上抛掷半径为 $6\sqrt{3}$ cm的圆碟,圆碟落地后与地砖间的间隙不相交的概率大约是______.

(2006,太原市初中数学竞赛)

讲解:如图5,欲使圆碟不压地砖间的间

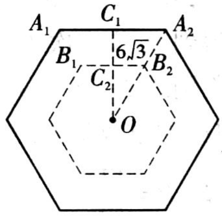

图 5

隙,则圆碟的圆心必须落在与地砖同心、边与地砖边彼此平行、距离为 $6\sqrt{3}$ cm 的小正六边形内.

作 $OC_1 \perp A_1A_2$,且 $C_1C_2 = 6\sqrt{3}$ cm.

因为 $A_1A_2 = A_2O = 36$, $A_2C_1 = 18$,所以,

$$C_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}A_2O = 18\sqrt{3}.$$

则 $C_2O = C_1O - C_1C_2$

$$= 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

又 $C_2O = \frac{\sqrt{3}}{2}B_2O$,所以,

$$B_2O = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 12\sqrt{3} = 24.$$

而 $B_1B_2 = B_2O$,则小正六边形的边长为 24 cm.

故所求概率为

$$P = \frac{\text{小正六边形面积}}{\text{大正六边形面积}}$$

$$= \left(\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\right)^2 = \left(\frac{24}{36}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

注:解本题的关键在于,准确理解“圆碟落地后与地砖间的间隙不相交”,进而将问题转化为两个正六边形的面积的比.

例 7 从分别写有数字 1,2,3,4,5 的 5 张卡片中任意取出两张,把第一张卡片上的数字作为十位数字,第二张卡片上的数字作为个位数字,组成一个两位数.则所组成的数是 3 的倍数的概率是( ).

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

(2008,全国初中数学联赛)

讲解:能够组成的两位数有

12,13,14,15,21,23,24,25,31,32,34,

35,41,42,43,45,51,52,53,54,

共 20 个,其中,是 3 的倍数的数为 12,15,21,24,42,45,51,54,共 8 个.

所以,所组成的数是 3 的倍数的概率是 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

例 8 一场数学游戏在两个非常聪明的学生甲、乙之间进行.裁判在黑板上先写出整数 2,3,…,2 006,然后随意擦去一个数,接下来由甲、乙两人轮流擦去一个数(即乙先擦去其中的一个数,然后甲再擦去一个数,如此下去).若最后剩下的两个数互质,则判甲胜;否则,判乙胜.按照这种游戏规则,求甲获胜的概率(用具体数字作答).

(2007,全国初中数学联赛四川初赛)

讲解:获胜的关键是看裁判擦去的是哪个数.注意到 2,3,…,2 006,共有 1 002 个奇数,1 003 个偶数.

(1) 若裁判擦去的是奇数,此时,乙一定获胜.

乙不管甲取什么数,只要还有奇数,就擦去奇数,这样,最后剩两个数一定是偶数,从而,所剩的两个数不互质.故乙胜.

(2) 若裁判擦去的是偶数,此时,甲一定获胜.

设裁判擦去的数是 $2m$.则剩下的数配成 1 002 对:

$(2,3)$,…,$(2m-2, 2m-1)$,

$(2m+1, 2m+2)$,…,$(2\,005, 2\,006)$.

这样,不管乙擦去哪一个数,甲都擦去所配对中的另一个数,最后剩下的两个数必然互质.故甲胜.

所以,甲获胜的概率为 $\frac{1\,003}{2\,005}$.

注:解本题的关键在于,一是必须根据裁判擦去的数是奇数还是偶数进行讨论;二是对数组进行有效的分类.

练习题

1. 甲、乙、丙、丁四位同学参加校田径运动会 4 ×100 m 接力跑比赛.如果任意安排四

位同学的跑步顺序,那么,恰好由甲将接力棒交给乙的概率是(　　).

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{1}{8}$　(D) $\frac{1}{12}$

(2008,全国初中数学竞赛浙江赛区初赛)

(提示:由列举法知,有 24 种可能,符合题意的有 6 种可能,概率为 $\frac{1}{4}$.)

2. 小丁、小明、小倩在一起做游戏时,需要确定做游戏的先后顺序. 他们约定用“剪子、布、锤子”的方式确定. 那么,在一个回合中三个人都出“布”的概率是______.

(2008,全国初中数学竞赛海南赛区初赛)

(提示:用列表、画树形图或用乘法原理知概率为 $\frac{1}{27}$.)

3. 一只盒子中有红球 m 个,白球 10 个,黑球 n 个,每个球除颜色外都相同. 从中任取一个球,取得是白球的概率与不是白球的概率相同. 那么,m 与 n 的关系是(　　).

(A) $m+n=10$　(B) $m+n=5$

(C) $m=n=10$　(D) $m=2, n=3$

(2007,山东省初中数学竞赛)

(提示:由概率的意义知,选(A).)

4. 书架上有两套同样的教材,每套分上、下两册,在这四册教材中随机抽取两册,恰好组成一套教材的概率是(　　).

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{6}$

(2006,全国初中数学竞赛浙江赛区初赛)

(提示:由列举法知概率为 $\frac{2}{3}$.)

5. 在 6×6 的方格纸中,每一个小方格是边长为 1 的正方形,A、B 两点在小方格的顶点上,位置如图 6 所示. 请你在小方格的顶点上标出满足题意的所有点 C,使 $\triangle ABC$ 的面积为 2 个平方单位,顺次联结各点 C 得一多边形. 则蚂蚁在这张方格纸上、停留在这多边形上的概率为(　　).

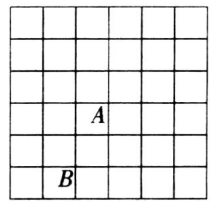

图 6

(A) $\frac{2}{9}$　(B) $\frac{5}{18}$　(C) $\frac{1}{3}$　(D) $\frac{4}{9}$

(提示:蚂蚁停留的多边形是平行四边形,概率为 $P=\frac{4\times4}{6\times6}=\frac{4}{9}$.)