2010 年北京市中学生数学竞赛（初二）

中图分类号：G424.79　文献标识码：A　文章编号：1005－6416(2011)03－0025－03

一、选择题（每小题 5 分，共 25 分）

1. 设 x、y 为实数，满足

$$x+y=1,\ x^4+y^4=\frac{7}{2}.$$

则 x^2+y^2 的值是（　）.

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

2. 如图 1，直线 $k /\!/ l$，$\angle 4-\angle 3=\angle 3-\angle 2=\angle 2-\angle 1=d>0$，其中，$\angle 3<90°$，$\angle 1=50°$. 则 $\angle 4$ 最大可能的整数值是（　）.

图 1

(A) 107°　(B) 108°

(C) 109°　(D) 110°

3. 设 p 是质数. 则满足

$$|a+b|+(a-b)^2=p$$

的整数对 (a,b) 共有（　）对.

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6

4. 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $BC=2$，$CA=3$，$AB=4$，h_a、h_b、h_c 分别表示边 BC、CA、AB 上的高. 则

$$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)=(\quad).$$

(A) $\frac{41}{6}$　(B) $\frac{39}{4}$　(C) $\frac{38}{5}$　(D) $\frac{38}{7}$

5. 如图 2，正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分，已知线段 OD、AD 的长都是正整数，$\frac{CE}{BE}=20$. 则满足上述条件的正方形 $ABCD$ 面积的最小值是（　）.

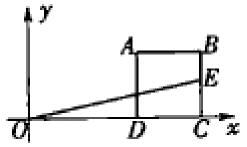

图 2

(A)324　(B)331　(C)354　(D)361

二、填空题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 如图 3，已知 $AB=2$，$BC=AE=6$，$CE=CF=7$，$BF=8$. 则四边形 $ABDE$ 与 $\triangle CDF$ 面积的比值是______.

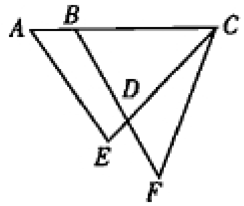

图 3

2. 已知 $4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}}}=\sqrt{5}+2.$

则 $k=$______.

3. 如图 4，在四边形 $ABCD$ 中，设 $\angle BAD+\angle ADC=270°$，且 E、F 分别为 AD、BC 的中点，$EF=4$，阴影部分分别是以 AB、CD 为直径的半圆. 则这两个半圆面积的和是______（圆周率为π）.

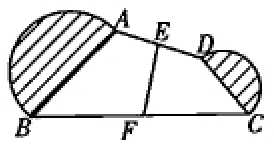

图 4

4. 计算：

$$\frac{1}{1\times 2\,010}+\frac{1}{2\times 2\,009}+\cdots+\frac{1}{2\,010\times 1}-\frac{2\,010}{2\,011}\left(\frac{1}{1\times 2\,009}+\frac{1}{2\times 2\,008}+\cdots+\frac{1}{2\,009\times 1}\right)$$

$=$______.

5. 如图 5，在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中，内接有六个大小相同的正方形，P、Q、M、N 是落在大正方形边上的小正方形的顶点. 则这六个小正方形的面积和是______.

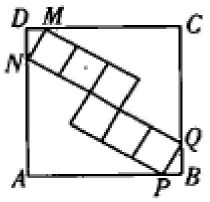

图 5

三、(10 分)在凸五边形 $ABCDE$ 中，

$AB=BC=CD=DE=EA$,

$\angle ABC=2\angle DBE$.

求证：$\angle ABC=60°$.

四、(15 分)能否将 2 010 写成 k 个互不相等的质数的平方和？如果能，试求 k 的最大值；如果不能，请简述理由.

五、(15 分)某次初二数学竞赛，共有 99 所中学报名参加，每校参赛者中既有男选手，也有女选手．证明：存在其中的 50 所学校的男选手总数不小于全部男选手总数的一半，且其参赛的女选手总数也不小于全部女选手总数的一半.

参考答案

一、1. A.

令 $x^2+y^2=a$. 则

$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=\frac{1-a}{2}$.

又 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=a^2-2\left(\frac{1-a}{2}\right)^2=\frac{1}{2}a^2+a-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$\Rightarrow a^2+2a-1=7$

$\Rightarrow a=2$ 或 -4.

由于 $a>0$，则 $x^2+y^2=2$.

2. C.

由$\angle 3=50°+2d<90°\Rightarrow d<20°$

$\Rightarrow\angle 4=50°+3d<50°+3\times20°=110°$

$\Rightarrow\angle 4$ 最大可能的整数值是 109°.

3. D.

因 $a+b$、$a-b$ 具有相同的奇偶性，所以，$p=2$.

于是，整数对(a,b)为

$(1,1),(-1,-1),(0,1)$,

$(1,0),(-1,0),(0,-1)$.

共 6 对.

4. B.

设$\triangle ABC$ 的面积为 S. 则

$h_a=\frac{2S}{a},h_b=\frac{2S}{b},h_c=\frac{2S}{c}$.

故$(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

$=\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\left(\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}\right)$

$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(2+3+4)=\frac{39}{4}$.

5. D.

如图 6，因为正方形 $ABCD$ 被直线 OE 分成面积相等的两部分，所以，直线 OE 通过正方形的中心 P.

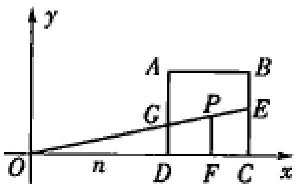

图 6

故 $BE=GD$.

令 $OD=n,AD=m$. 则

$\frac{CE}{BE}=\frac{CE}{GD}=\frac{OC}{OD}=\frac{n+m}{n}=20$.

所以，$m=19n\geqslant19$.

当 $n=1$ 时，$m=19$.

故正方形 $ABCD$ 面积的最小值为 $19^2=361$.

二、1. 1.

因 $AC=BF=8,CE=CF=7,BC=AE=6$，所以，$\triangle AEC\cong\triangle BCF$.

故 $S_{四边形ABDE}=S_{\triangle AEC}-S_{\triangle BDC}$

$=S_{\triangle BCF}-S_{\triangle BDC}=S_{\triangle CDF}$.

2. -1.

注意到$\sqrt{5}+2=4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

故$\sqrt{5}-2k=\sqrt{5}+2\Rightarrow k=-1$.

3. 8π.

如图 7，延长 BA 与 CD 交于点 M.

由$\angle BAD+\angle ADC=270°$，得

$\angle BMC=\angle AMD=90°$.

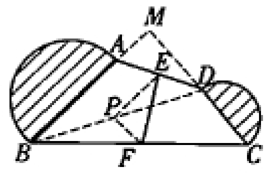

图 7

联结 BD，并取 BD 的中点 P，再联结 PE、

PF.

由三角形的中位线定理有

$PE \underline{\parallel} \frac{AB}{2}, PF \underline{\parallel} \frac{CD}{2}$.

因此，$\angle EPF = \angle BMC = 90°$.

在 Rt$\triangle EPF$ 中应用勾股定理得

$PE^2 + PF^2 = EF^2 = 4^2$,

即　$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 16$.

所以，两个阴影半圆面积的和为

$\frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \times 16 = 8\pi$.

4. $\frac{1}{2\,021\,055}$.

对于 $k = 2, 3, \cdots, 2\,010$，有

$\frac{1}{k(2\,011-k)} - \frac{2\,010}{2\,011} \cdot \frac{1}{(k-1)(2\,011-k)}$

$= \frac{1}{2\,011}\left[\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2\,011-k}\right) - \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{2\,011-k}\right)\right]$

$= \frac{1}{2\,011}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$.

故原式 $= \frac{1}{2\,010} + \frac{1}{2\,011}\left(\frac{1}{2\,010} - 1\right)$

$= \frac{1}{2\,011 \times 1\,005} = \frac{1}{2\,021\,055}$.

5. 32.64.

如图 8，过每个小正方形的顶点依次作各边的平行线，构成"弦图"，其中的小直角三角形长边为 a，短边为 b. 则

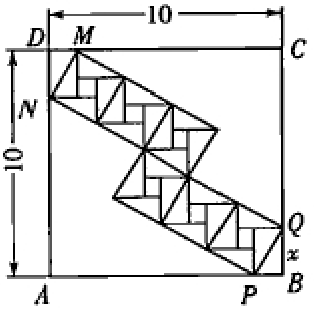

图 8

$\begin{cases} 2a + 5b = 10, \\ 5a = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 2, \\ b = 1.2. \end{cases}$

所以，一个小正方形面积为

$2^2 + 1.2^2 = 5.44$.

于是，六个小正方形面积和为

$5.44 \times 6 = 32.64$.

三、因为 $\angle ABC = 2\angle DBE$，所以，

$\angle DBE = \angle ABE + \angle CBD$.

如图 9，过点 B 作 $BP \parallel AE$，与 DE 交于点 P.

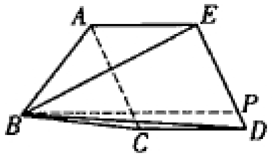

图 9

结合 $AB = AE$，知 $\angle PBE = \angle AEB = \angle ABE$.

所以，$\angle CBD = \angle DBP$.

但由 $BC = CD$，得 $\angle CDB = \angle CBD$.

所以，$\angle CDB = \angle DBP$.

因此，$BP \parallel CD$.

又 $BP \parallel AE$，则 $CD \parallel AE$.

而 $CD = AE$，知四边形 $ACDE$ 是平行四边形.

于是，$AC = DE$.

在 $\triangle ABC$ 中，由 $AB = BC = AC$，知 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

因此，$\angle ABC = 60°$.

四、若 2 010 能写成 k 个质数的平方和，取最小的 10 个互不相等的质数的平方和，则

$4 + 9 + 25 + 49 + 121 + 169 +$

$289 + 361 + 529 + 841$

$= 2\,397 > 2\,010$.

因此，$k \leqslant 9$.

易知，只有一个偶质数 2，其余质数都是奇数，而奇数的平方被 8 除余 1.

因为 2 010 被 8 除余 2，但九个不同质数的平方和被 8 除余 1 或 4，八个不同质数的平方和被 8 除余 0 或 3，故 $k \leqslant 7$.

当 $k = 7$ 时，经试算得

$2^2 + 3^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 + 37^2 = 2\,010$.

综上，2 010 可以写成 k 个互不相等的质数的平方和，k 的最大值是 7.

事实上，还可以证明 $k \neq 1, 2, \cdots, 6$.

所以，2 010 只能表示为七个互不相等的质数的平方和.

五、将参赛中学编号为 $1, 2, \cdots, 99$，以 x_i $(i = 1, 2, \cdots, 99)$ 表示编号为第 i 所中学男选

2010年全国高中数学联赛山东赛区预赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2011)03-0028-07

一、选择题(每小题6分,共60分)

1. 已知$\{a_n\}$是一等差数列,S_n是其前n项之和. 则$-a_m<a_1<-a_{m+1}$是$S_m>0$, $S_{m+1}<0$的(　　)条件.

(A)充分必要

(B)充分而不必要

(C)必要而不充分

(D)既不充分也不必要

2. 已知函数

$f(x)=x^3+(a+1)x^2+(a+1)x+a$

在其定义域内既有极大值又有极小值. 则实数a的取值范围是(　　).

(A) $-1<a<2$　(B) $a>2$

(C) $a<-1$　(D) $a>2$或$a<-1$

3. 若集合$M=\left\{x\,\middle|\,\frac{|3-x|}{|5-x|}\leqslant\frac{1}{2}\right\}$和集合$N=\{x\mid x^2-2x+c\leqslant0\}$满足$M\cap N=M$,则实数$c$的取值范围是(　　).

(A) $c\leqslant-\frac{44}{9}$　(B) $c\leqslant-\frac{55}{9}$

(C) $c\leqslant-\frac{66}{9}$　(D) $c\leqslant-\frac{77}{9}$

4. 已知$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

$2\tan\beta=\tan2\alpha,\tan(\beta-\alpha)=-2\sqrt{2}$.

则$\cos\alpha=$(　　).

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

5. 已知整数集合

$M=\{m\mid x^2+mx-36=0$有整数解$\}$,

集合A满足条件:

(1) $\varnothing\subset A\subseteq M$;

(2)若$a\in A$,则$-a\in A$.

则所有这样的集合A的个数为(　　).

(A)15　(B)16　(C)31　(D)32

6. 已知$0<a<b$,在a、b之间插入一个正数k,使a、k、b成等比数列;在a、b之间插入两个正数m、n,使a、m、n、b成等差数列. 则$(k+1)^2$与$(m+1)(n+1)$的大小关系为(　　).

(A) $(k+1)^2<(m+1)(n+1)$

(B) $(k+1)^2=(m+1)(n+1)$

(C) $(k+1)^2>(m+1)(n+1)$

(D)不确定

手的数量. 不妨设$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{99}$.

将除第1所学校外的2~99号学校分为两组.

第一组是编号为2,4,…,98的49所学校. 男选手总和设为A_1,女选手总和设为B_1.

第二组是编号为3,5,…,99的49所学校. 男选手总和设为A_2,女选手总和设为B_2.

由$x_{2k}\geqslant x_{2k+1}(k=1,2,\cdots,49)$得

$A_1\geqslant A_2$.

由$x_{2k-1}\geqslant x_{2k}(k=2,3,\cdots,49)$得

$A_2\geqslant A_1-x_2\geqslant A_1-x_1$.

因此,$A_2+x_1\geqslant A_1$.

又在第一组与第二组的选手中,必有一组(设为C)的女选手数量不小于两组参赛女选手总数量的一半,再将编号为1的学校加入到C组,所得的50所学校的男、女选手也都不小于男、女选手总数的一半.

(李延林　提供)