2007 年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 若 a、b、c 是 3 个不同的正整数,并且 $abc=16$,则 $a^b-b^c+c^a$ 可能的最大值是(　　).

(A) 249　(B) 253　(C) 263　(D) 264

2. 已知三个连续的正整数的倒数和等于 $\frac{191}{504}$. 则这三个数之和等于(　　).

(A) 27　(B) 24　(C) 21　(D) 18

3. 分母是 2 007 的正的最简真分数有(　　)个.

(A) 675　(B) 1 326　(C) 1 329　(D) 1 332

4. 对于实数 x,符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,例如,$[3.14]=3$,$[-7.59]=-8$. 则关于 x 的方程 $\left[\frac{3x+7}{7}\right]=4$ 的整数根有(　　)个.

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

5. 如图 1,已知长方形的长为 8,宽为 4,将长方形沿一条对角线折起压平. 则重叠部分(阴影三角形)的面积是(　　).

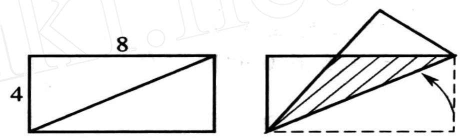

图 1

7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt{2}-1$, $1-2\sqrt{2}$.

令 $x=\sqrt{2}y$,代入原方程得

$$6\sqrt{2}y^3+4\sqrt{2}y^2-17\sqrt{2}y+18y-6+5\sqrt{2}=0.$$

易知 $y=\frac{1}{3}$ 满足条件. 故 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 于是,

$$3x^3+2\sqrt{2}x^2-(17-9\sqrt{2})x-(6-5\sqrt{2})$$

$$=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(3x^2+3\sqrt{2}x+9\sqrt{2}-15).$$

$$=3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(x-\sqrt{2}+1)(x+2\sqrt{2}-1).$$

所以,$x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_2=\sqrt{2}-1$, $x_3=1-2\sqrt{2}$.

8. $\frac{k-8}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{k(k-16)}$.

设矩形的长、宽分别为 a、$b(a\geq b)$.

则 $\frac{4(a+b)^2}{ab}=k$,即

$$4a^2+(8-k)ab+4b^2=0.$$

令 $t=\frac{a}{b}$,则 $4t^2+(8-k)t+4=0$.

解得 $t=\frac{1}{8}\left[(k-8)+\sqrt{k(k-16)}\right]$.

9. $6\sqrt{223}$.

设正方形边长 $a=\sqrt{2\ 007}$,$\angle D'BC=\alpha$. 则 $\angle BD'E=2\alpha$,$CD'=a\tan\alpha$,

$BD'=a(1-\tan\alpha)$.

所以,$\triangle BD'E$ 的周长为

$$a(1-\tan\alpha)(1+\tan 2\alpha+\sec 2\alpha)$$

$$=a\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}$$

$$=a\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$$=2a=6\sqrt{223}.$$

10. 20 或 119.

设 $x^2+(x+1)^2=v^2$,则 $(2x+1)^2=2v^2-1$.

令 $u=2x+1$,则 $u^2-2v^2=-1$. 其为佩尔方程,其基本解为 $(u_0,v_0)=(1,1)$.

其全部正整数解可由

$$u_n+v_n\sqrt{2}=(u_0+v_0\sqrt{2})^{2n+1}$$

得到. 其中,$(u_1,v_1)=(7,5)$,$(u_2,v_2)=(41,29)$,$(u_3,v_3)=(239,169)$,$u_4>400$.

故 $x=20$ 或 119.

(夏兴国　提供)

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 将正整数从 1 开始依次按如图 2 所示的规律排成一个数阵,其中,2 在第 1 个拐角处,3 在第 2 个拐角处,5 在第 3 个拐角处,7 在第 4 个拐角处,……:那么,在第 2 007 个拐角处的数是______.

```
…… —22—21
            |
10—9 —8—7   20
|         |   |
11  2—1   6  19
|   |     |   |
12  3—4—5    18
|             |
13—14—15—16—17
```

图 2

2. 在一个 3 × 3 的方格表中填有 1,2,3,4,5,6,7,8,9 九个数,每格只填一个数. 现将每行中放有最大数的格子染成红色,放有最小数的格子染成绿色. 设 M 是红格中的最小数,m 是绿格中的最大数. 则 $M - m$ 可以取到______个不同的值.

3. 如图 3,已知在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,P、Q 分别是边 AC、AB 上的点,且 $AP = PQ = QB = BC$. 则 $\angle PCQ =$______.

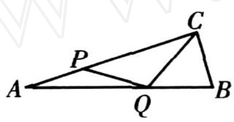

图 3

4. 化简

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)-\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

的值为______.

5. 如图 4,在长方形 $ABCD$ 中,E、F、G 分别是边 AB、BC、CD 的中点. 已知长方形 $ABCD$ 的面积是 40 cm^2. 则四边形 $MFNP$ 的面积是______cm^2.

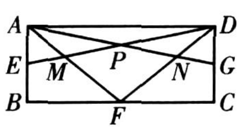

图 4

三、(15 分) 已知 a、b、c 是实数. 若 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$、$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$、$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 之和恰等于 1,求证:这三个分数的值有两个为1,一个为 -1.

四、(10 分) 如图 5,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC = 46°$,D 是边 BC 上的一点,$DC = AB$,$\angle DAB = 21°$. 试确定 $\angle CAD$ 的度数.

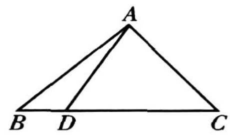

图 5

五、(15 分) 若对于任意 n 个连续正整数中,总存在一个数的数字之和是 8 的倍数. 试确定 n 的最小值. 并说明理由.

参 考 答 案

一、**1.** C.

由题设易知 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 8\}$.

且当 $b = 1, c = 2, a = 8$ 时, $a^b - b^c + c^a$ 取最大值 $8 - 1 + 2^8 = 263$.

2. B.

设此三个连续正整数为 $n-1, n, n+1$. 则

$$\frac{191}{504}=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\frac{3n^2-1}{n(n^2-1)},$$

即 $191n^3 - 1512n^2 - 191n + 504 = 0$.

因式分解得 $(n-8)(191n^2+16n-63)=0$.

当 $n \geqslant 1$ 时,$191n^2+16n-63>0$. 故 $n = 8$.

3. D.

因 $2007 = 3^2 \times 223$,所以,比 2 007 小的且与 2 007 互质的正整数有

$$2007-\left[\frac{2007}{3}\right]-\left[\frac{2007}{223}\right]+\left[\frac{2007}{3\times 223}\right]$$

$= 1332$ (个).

4. B.

由 $\left[\frac{3x+7}{7}\right]=4$,知 $4 \leqslant \frac{3x+7}{7} < 5$,得 $7 \leqslant x < \frac{28}{3}$. 故 $x = 7, 8, 9$.

5. A.

如图 6,过 E 作 $EF \perp BD$ 于 F. 易知点 F 为 BD 中点.

又 A、B、F、E 四点共圆,故

$$DE \cdot DA = DF \cdot DB,$$

即 $DE \cdot 8 = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} \Rightarrow DE = 5$.

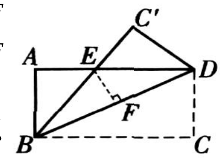

图 6

故 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=10$.

二、**1.** 1 008 017.

设第 i **个拐角处的数为** a_i. **显然**,

$a_1=2$, $a_{2i}=a_{2i-1}+i$,

$a_{2i+1}=a_{2i}+(i+1)$.

因 $2\,007=2\times1\,003+1$,**所以**,

$$a_{2\,007}=1+2(1+2+\cdots+1\,003)+1\,004$$
$$=1\,004^2+1=1\,008\,017.$$

2. 8.

显然,$3\le m$、$M\le 7$,**且** $m\ne M$. **故**

$M-m\in\{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$.

如图 7,8 **个值均可取到**

7	9	8
6	5	4
3	2	1

M=3,m=7

6	9	8
7	5	4
3	2	1

M=3,m=6

5	9	8
7	6	4
3	2	1

M=3,m=5

5	9	8
7	6	1
4	3	2

M=4,m=5

9	8	5
7	4	2
6	3	1

M=6,m=5

9	6	5
8	4	2
7	3	1

M=7,m=5

9	6	4
8	5	2
7	3	1

M=7,m=4

9	6	3
8	4	2
7	5	1

M=7,m=3

图 7

3. 30°.

设 $\angle A=2\alpha$,**则**

$\angle ABC=\angle ACB=90°-\alpha$,

$\angle BCQ=\angle BQC=45°+\frac{\alpha}{2}$,

$\angle PCQ=\angle ACB-\angle BCQ=45°-\frac{3\alpha}{2}$.

又由 $(AP\cdot2\cos2\alpha+BQ)2\sin\alpha=BC$,**得**

$2\sin\alpha(2\cos2\alpha+1)=1$

$\Rightarrow2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=1$

$\Rightarrow\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\alpha=10°$ **或** $50°$(**舍去**).

故 $\angle PCQ=45°-\frac{3\alpha}{2}=30°$.

4. -1.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$
$$=-1+\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{c}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{d}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)$$
$$=-1+\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right).$$

5. 9.

联结 FP **并延长交** AD **于点** Q,**显然**,**点** Q **是** AD **的中点**. **则**

$PQ=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{4}AB$, $FP=\frac{3}{4}AB$.

所以,$MN=\frac{3}{5}BC$.

故 $S_{\text{四边形}MFNP}=\frac{1}{2}FP\cdot MN$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}S_{\text{长方形}ABCD}=9$.

三、由题设

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1,$$

即
$$\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0$$
$$\Rightarrow\left(\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc}\right)+\left(\frac{a^2+c^2-b^2-2ac}{2ac}\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}\right)=0$$
$$\Rightarrow\frac{(b-c)^2-a^2}{2bc}+\frac{(a-c)^2-b^2}{2ac}+\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=0$$
$$\Rightarrow\frac{a(b-c+a)(b-c-a)+b(a-c+b)(a-c-b)}{2abc}+\frac{c(a+b+c)(a+b-c)}{2abc}=0$$
$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(ab-ac-a^2+ab-bc-b^2+ac+bc+c^2)}{2abc}=0$$
$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(c^2-(a-b)^2]}{2abc}=0$$
$$\Rightarrow\frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc}=0.$$

所以,$a+b-c=0$ **或** $c+a-b=0$ **或** $b+c-a=0$.

(1) 若 $a+b-c=0$,则

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{2bc}=1;$$

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+a^2-(c-a)^2}{2ac}=1;$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab}=-1.$$

(2) 若 $c+a-b=0$,同理可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=-1,$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

(3) 若 $b+c-a=0$,同理可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-1,\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=1,$$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1.$$

综合(1)、(2)、(3)可得,三个分数

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}、\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}、\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

的值有两个为 1,一个为 -1.

四、如图 8,作 $\triangle ABD$ 关于 AD 的轴对称图形 $\triangle AED$,则

$\angle EAD=21°$,

$AE=AB$.

所以,$DE=BD$.

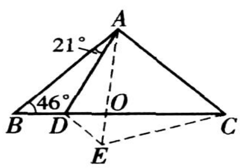

图 8

易知

$\angle ADC=21°+46°=67°$.

故 $\angle ADE=\angle ADB=180°-67°=113°$,

$\angle CDE=113°-67°=46°$.

联结 CE.

因为 $DC=AB$,所以,

$\triangle CDE\cong\triangle ABD\cong\triangle AED$.

设 O 为 AE 与 DC 的交点.

因为 $\angle ODE=\angle OED=46°$,于是,

$OD=OE$.

又 $DC=AE$,则

$AO=CO\Rightarrow\angle OCA=\angle OAC$

$\Rightarrow\angle COE=2\angle ACO$.

易知 $\angle COE=2\times46°=92°$.

因此,$2\angle ACO=\angle COE=92°$.

从而,$\angle ACO=46°=\angle OAC$.

所以,$\angle DAC=\angle DAE+\angle EAC=67°$.

五、先证 $n\leqslant14$ 时,题设的性质不成立.

当 $n=14$ 时,对于

9 999 993,9 999 994,…,10 000 006

这 14 个连续整数,任意一个数的数字之和均不能被 8 整除.

故 $n\leqslant14$ 时,题设的性质不成立.

因此,要使题设的性质成立,应有

$n\geqslant15$.

再证 $n=15$ 时,题设的性质成立.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 为任意的连续 15 个正整数,则这 15 个正整数中,个位数字为 0 的整数最多有两个,最少有一个,可分为:

(1) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 中个位数字为 0 的整数有两个时,设 $a_i<a_j$,且 a_i、a_j 的个位数字为 0,则满足 $a_i,a_i+1,\cdots,a_i+9,a_j$ 为连续的 11 个整数,其中,$a_i,a_i+1,\cdots,a_i+9$ 无进位.

设 n_i 表示 a_i 各位数字之和,则前 10 个数各位数字之和分别为 $n_i,n_i+1,\cdots,n_i+9$.故这连续的 10 个数中至少有一个被 8 整除.

(2) 当 $a_1,a_2,\cdots,a_{15}$ 中个位数字为 0 的整数只有一个时(记为 a_i):

(i) 若整数 i 满足 $1\leqslant i\leqslant8$,则在 a_i 后面至少有 7 个连续整数.于是,$a_i,a_i+1,\cdots,a_i+7$ 这 8 个连续整数的各位数字和也为 8 个连续整数.所以,必有一个数能被 8 整除.

(ii) 若整数 i 满足 $9\leqslant i\leqslant15$,则在 a_i 前面至少有 8 个连续整数,不妨设为 $a_{i-8},a_{i-7},\cdots,a_{i-1}$,这 8 个连续整数的各位数字和也为 8 个连续整数.所以,必有一个数能被 8 整除.

综上,对于任意 15 个连续整数中,必有一个数,其各位数字之和是 8 的倍数.

而小于 15 个的任意连续整数不成立此性质.

所以,n 的最小值是 15.

(李延林　提供)