2004年北京市中学生数学竞赛(初二)

初 赛

一、选择题(每小题6分,共36分)

1.若 $2\,004-200.4+(-20.04)=x+2.004$,则 $x=($ $)$.

(A)2 182.356 (B)1 821.636

(C)1 785.564 (D)1 781.556

2.如图1,$CD/\!/BE$.则$\angle 2+\angle 3-\angle 1=$( ).

(A)90° (B)120° (C)150° (D)180°

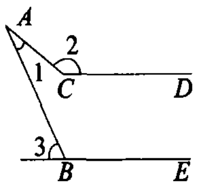

图1

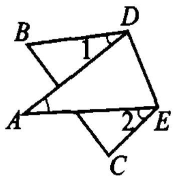

图2

3.如图2,将纸片$\triangle ABC$沿着DE折叠压平.则$\angle A=$( ).

(A)$\angle 1+\angle 2$ (B)$\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$

(C)$\frac{1}{3}(\angle 1+\angle 2)$ (D)$\frac{1}{4}(\angle 1+\angle 2)$

4.如果 $a+2b+3c=12$,且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则 $a+b^2+c^3=$( ).

(A)12 (B)14 (C)16 (D)18

5.一种玩具,有2个按钮(1个黄色,1个红色)和100个能站能坐的小木偶.按一次红色按钮就会有1个站着的木偶坐下;按一次黄色按钮就可以使站着的小木偶增加1倍.现在只有3个小木偶站着,要使站着的小木偶变为91个,最少需按按钮( )次.

(A)5 (B)6 (C)7 (D)8

6.如图3,在四边形$ABCD$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$的内角平分线恰相交于一点P.记$\triangle APD$、$\triangle APB$、$\triangle BPC$、$\triangle DPC$的面积分别为S_1、S_2、S_3、S_4.则有( ).

(A)$S_1+S_3=S_2+S_4$

(B)$S_1+S_2=S_3+S_4$

(C)$S_1+S_4=S_2+S_3$

(D)$S_1+S_3\neq S_2+S_4$

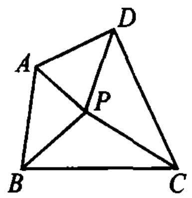

图3

二、填空题(每小题8分,共64分)

1.计算$\frac{20\,042\,003^2+1}{20\,042\,002^2+20\,042\,004^2}=$____.

2.已知x、y为正整数,且满足$2x^2+3y^2=4x^2y^2+1$.则$x^2+y^2=$____.

3.如图4,所有的四边形都是正方形,所有的三角形都是直角三角形,其中最大的正方形的边长是13 cm.则四个阴影正方形的面积之和等于____.

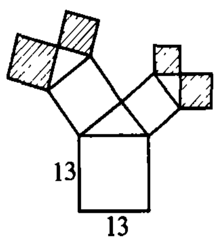

图4

4.已知$\frac{y+z-x}{x+y+z}=\frac{z+x-y}{y+z-x}=\frac{x+y-z}{z+x-y}=p$.则$p^3+p^2+p=$____.

5.化简:

$$\left|\frac{1}{2\,004}-\frac{1}{2\,003}\right|+\left|\frac{1}{2\,003}-\frac{1}{2\,002}\right|+\left|\frac{1}{2\,002}-\frac{1}{2\,001}\right|-\left|\frac{1}{2\,001}-\frac{1}{2\,004}\right|=\_\_\_\_.$$

6.如果三个边长为整数的正方形纸片的面积之和为2 004,其中最大的正方形纸片的面积为S_1,最小的正方形纸片的面积为S_2,

则$\frac{S_1}{S_2}$的最大值等于______.

7. 用正整数 a 去除 63、91、129 所得的 3 个余数的和是 25.则 a 的值为______.

8. 如图 5,长方形 $ABCD$ 的面积是 35 cm^2,阴影$\triangle ABE$ 的面积是 5 cm^2,阴影$\triangle ADF$ 的面积是 7 cm^2.那么,$\triangle AEF$ 的面积是多少平方厘米?

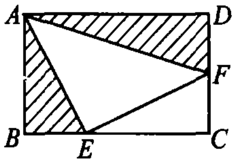

图 5

复 赛

一、填空题(每小题 8 分,共 40 分)

1. 如图 6,一条两边平行的纸带,纸带的宽度(两平行线间的距离)为 10 cm.将纸带折起压平.那么,重叠部分$\triangle ABC$ 面积的最小值是______ cm^2.

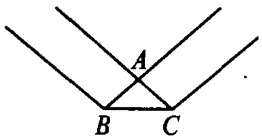

图 6

2. 如图 7 所示,将 4×4 的方格表的每一个方格里都填上 1 个实数,使得每一行、每一列及两条对角线上的 4 个数的和都等于 2 004.那么,方格表中 4 个角上的方格里所填的 4 个数之和 $x+y+u+v$ 的值等于______.

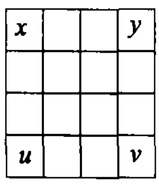

图 7

3. 如图 8,点 C 在线段 AB 上,$DA\perp AB$,$EB\perp AB$,$FC\perp AB$,且 $DA=BC$,$EB=AC$,$FC=AB$,$\angle AFB=51°$.则$\angle DFE=$______.

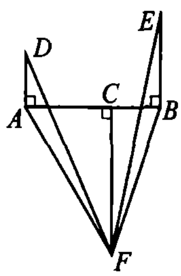

图 8

4. 有 8 个连续的正整数,其和可以表示成 7 个连续的正整数的和,但不能表示为 3 个连续的正整数的和.那么,这 8 个连续的正整数中最大数的最小值是______.

5. 如图 9,在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,I 是$\angle A$、$\angle B$ 的平分线 AD 与 BE 的交点.已知$\triangle ABI$ 的面积为 12.则四边形 $ABDE$ 的面积等于______.

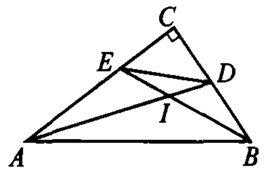

图 9

二、(15 分)已知 a 是正整数,且 $a^2+2\,004a$ 是一个正整数的平方.求 a 的最大值.

三、(15 分)在$\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,且满足

$$a^4+b^4+\frac{1}{2}c^4=a^2c^2+b^2c^2.$$

试判定$\triangle ABC$ 的形状.

四、(15 分)能将任意 8 个连续的正整数分为两组,使得每组 4 个数的平方和相等吗?如果能,请给出一种分组法,并加以验证;如果不能,请说明理由.

五、(15 分)如图 10,设 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1 分别是凸六边形 $ABCDEF$ 的边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点.已知$\triangle ABC_1$、$\triangle BCD_1$、$\triangle CDE_1$、$\triangle DEF_1$、$\triangle EFA_1$、$\triangle FAB_1$ 的面积之和为 m,六边形 $ABCDEF$ 的面积为 S.证明:$S=\frac{2}{3}m$.

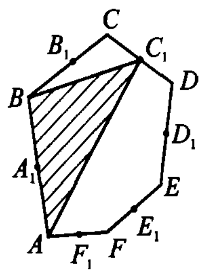

图 10

参考答案

初 赛

一、1.D.

2.D.延长 DC 交 AB 于 F.

由 $CD/\!/BE$,有$\angle BFC=\angle 3$.则

$\angle 2-\angle 1=\angle AFC$

$=180°-\angle BFC=180°-\angle 3$.

3.B.

由四边形内角和为360°,得

$\angle B+(\angle 1+\angle ADE)+(\angle AED+\angle 2)+\angle C$

$=360°$.

而 $\angle B+\angle C=\angle ADE+\angle AED=180°-\angle A$,故

$\angle A=\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$.

4.B.

由 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,得

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Rightarrow a=b=c$.

5.C.

3(黄)6(黄)12(黄)24(红)23(黄)46(黄)92(红)91.共需按7次按钮.

6.A.

由角平分线上一点到角的两边距离相等,可知点 P 到四边形各边的距离相等,设为 h(如图11).易知

$\triangle APE\cong\triangle APF$,

$\triangle BPE\cong\triangle BPH$,

$\triangle CPG\cong\triangle CPH$,

$\triangle DPG\cong\triangle DPF$.

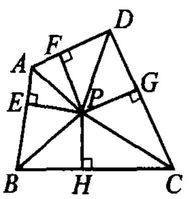

图11

相加得 $S_{\triangle ABP}+S_{\triangle CDP}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ADP}$.

二、1. $\frac{1}{2}$.

设 $a=20\,042\,003$,则

$$原式=\frac{a^2+1}{(a-1)^2+(a+1)^2}=\frac{a^2+1}{2(a^2+1)}=\frac{1}{2}.$$

2.由已知,有 $4x^2y^2-2x^2-3y^2=-1$.

上式两边乘以4,整理得

$(4x^2-3)(4y^2-2)=2=1\times 2$.

所以,$\begin{cases}4x^2-3=1,\\4y^2-2=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4x^2-3=2,\\4y^2-2=1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x^2=1,\\y^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=1.25,\\y^2=0.75.\end{cases}$(舍)

3.169.

如图12,反复应用勾股定理,得

$S_A+S_B+S_C+S_D$

$=S_E+S_F=S_G$

$=13^2=169$.

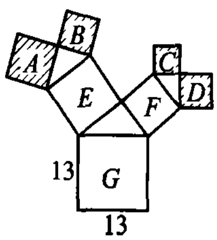

图12

4.1.

由已知,有

$$p^3=\frac{y+z-x}{x+y+z}\cdot\frac{z+x-y}{y+z-x}\cdot\frac{x+y-z}{z+x-y}=\frac{x+y-z}{x+y+z},$$

$$p^2=\frac{y+z-x}{x+y+z}\cdot\frac{z+x-y}{y+z-x}=\frac{z+x-y}{x+y+z}.$$

则 $p^3+p^2+p=1$.

5.0.

$$原式=-\left(\frac{1}{2\,004}-\frac{1}{2\,003}\right)-\left(\frac{1}{2\,003}-\frac{1}{2\,002}\right)-\left(\frac{1}{2\,002}-\frac{1}{2\,001}\right)-\left(\frac{1}{2\,001}-\frac{1}{2\,004}\right)$$

$=0$.

6.484.

设正方形边长分别为 a、b、c,且 $a<b<c$.则有 $a^2+b^2+c^2=2\,004$.

显然,$S_2=a^2$,$S_1=c^2\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{c^2}{a^2}$.

易知 $40^2+20^2+2^2=2\,004$,

$44^2+8^2+2^2=2\,004$.

要 $\frac{S_1}{S_2}$ 最大,应 S_1 尽可能地大,S_2 尽可能地小.

故 c^2 最大为 $44^2=1\,936$,a^2 最小为 $2^2=4$,此时,$b^2=8^2=64$.

所以,$\frac{S_1}{S_2}$ 的最大值为 $\frac{1\,936}{4}=484$.

7.43.

由题意,有

$63=a\times k_1+r_1$,$91=a\times k_2+r_2$,

$129=a\times k_3+r_3$.$(0\leqslant r_1、r_2、r_3<a)$

相加得

$63+91+129$

$=a(k_1+k_2+k_3)+(r_1+r_2+r_3)$

$=a(k_1+k_2+k_3)+25$.

故258被 a 整除.

由于 $258=2\times 3\times 43$,a 大于余数,且3个余数的和是25,所以,$a>8$.又 a 不超过63、91、129中的最小者63,故258的因数中符合要求的只有 $a=43$.

8.15.5.

如图13,画出长方形 $ADFP$ 与长方形 $ABET$.设 PF、TE 的交点为 O.由 $S_{\triangle ABE}=5\text{ cm}^2$,知

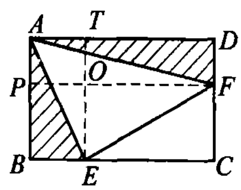

图13

$S_{长方形ABET}=10\text{ cm}^2$.

故 $S_{长方形ECDT}=35-10=25(\text{cm}^2)$.

由 $S_{\triangle ADF}=7\ \mathrm{cm}^2$,知

$S_{长方形ADFP}=14\ \mathrm{cm}^2$.

故 $S_{长方形BCFP}=35-14=21(\mathrm{cm}^2)$.

则 $\dfrac{S_{长方形BCFP}}{S_{长方形ECFO}}=\dfrac{BC}{EC}=\dfrac{S_{长方形BCDA}}{S_{长方形ECDT}}$,即

$\dfrac{21}{S_{长方形ECFO}}=\dfrac{35}{25}$.

所以,$S_{长方形ECFO}=21\times25\div35=15(\mathrm{cm}^2)$,

$S_{\triangle ECF}=\dfrac{1}{2}S_{长方形ECFO}=7.5\ \mathrm{cm}^2$.

故 $S_{\triangle AEF}=S_{长方形ABCD}-S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ADF}-S_{\triangle ECF}$

$=35-5-7-7.5=15.5\ (\mathrm{cm}^2)$.

复　赛

一、1.50.

显然,$AC\geqslant10$,$AB\geqslant10$.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\times h\geqslant\dfrac{1}{2}\times10\times10=50$.

当 $BA\perp CA$ 时,$S_{\triangle ABC}=50$.

2.2 004.

如图 14,由题意,有

$x+b+g+v=2\,004$, ①

$x+a+e+u=2\,004$, ②

$y+c+f+u=2\,004$, ③

$y+d+h+v=2\,004$. ④

x			y
a	b	c	d
e	f	g	h
u			v

图 14

①+②+③+④,得

$2(x+y+u+v)+(a+b+c+d)+(e+f+g+h)$

$=4\times2\,004$,

即 $2(x+y+u+v)+2\,004+2\,004=4\times2\,004$.

所以,$x+y+u+v=2\,004$.

3.39°.

如图 15,联结 AE、BD.

则

$\triangle ABD\cong\triangle CFB$,

$\triangle ABE\cong\triangle FCA$.

所以,$DB=FB$,

$AE=AF$.

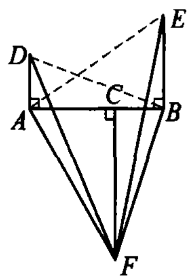

图 15

故知$\triangle DBF$、$\triangle EAF$ 都是等腰直角三角形.有

$\angle BFD=45°$,$\angle AFE=45°$.

因为$\angle AFB=51°$,所以,

$\angle EFB=6°$,$\angle DFA=6°$.

因此,$\angle DFE=\angle AFB-\angle EFB-\angle DFA=39°$.

4.21.

设这 8 个连续正整数依次是

$a,a+1,a+2,a+3,a+4,a+5,a+6,a+7$.

其和为 $S=8a+28$,即 S 被 8 除余 4.

因为 S 被 7 整除,所以,$8a+28=7n$.

因此,$4\mid n$.

令 $n=4k$,则 $2a+7=7k$.

故 $a=\dfrac{7(k-1)}{2}$.

要 a 为正整数,k 应为正奇数.

当 $k=1$ 时,$a=0$,不是正整数,不合题意;

当 $k=3$ 时,$a=7$,$S=84$ 能被 3 整除,不合题意;

当 $k=5$ 时,$a=14$,$S=140$ 不能被 3 整除,符合题意;

当 $k=7,9,\cdots$等其他奇数时,a 的值变得大于 14,不符合最小的要求.

所以,$a=14$ 时,$a+7=21$.

因此,这 8 个连续的正整数中最大数的最小值是 21.

5.24.

如图 16,作 E 关于AD 的对称点 F,作 D 关于 BE 的对称点 G,则 F、G 在 AB 上,且 $AF=AE$,$BG=BD$.故

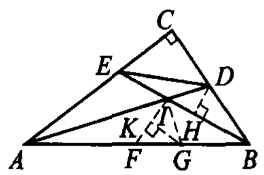

图 16

$\angle AIB=\angle EID=135°$,

$\angle DIB=\angle EIA=\angle AIF=\angle BIG=45°$.

所以,$\angle EIF=\angle DIG=90°$,$\angle FIG=45°$.

作 $GK\perp IF$ 于 K,$DH\perp BI$ 于 H.

因为 $\mathrm{Rt}\triangle DHI\cong\mathrm{Rt}\triangle GKI$,所以,

$DH=GK$.

于是,有

$S_{\triangle DIE}=\dfrac{1}{2}\times EI\times DH$,

$S_{\triangle IFG}=\dfrac{1}{2}\times IF\times GK$.

由于 $EI = IF$, $DH = GK$,所以,

$S_{\triangle DIE} = S_{\triangle IFC}$.

因此,$S_{四边形ABDE} = 2\times S_{\triangle ABI} = 24$.

二、设 $a^2 + 2\,004a = m^2$,其中 m 是正整数.

配方、恒等变形得

$(a+1\,002)^2 - m^2 = 1\,002^2 = 2^2\times 3^2\times 167^2$.

易知 $a+1\,002+m$、$a+1\,002-m$ 都是偶数,且

$a+1\,002+m > a+1\,002-m > 0$.

要求正整数 a 的最大值,必须 $a+1\,002+m$ 与 $a+1\,002-m$ 之和最大,即

$$\begin{cases} a+1\,002+m = 2\times 3^2\times 167^2, \\ a+1\,002-m = 2. \end{cases}$$

解得 $m = 251\,000$, $a = 250\,000$.

三、由 $a^4 + b^4 + \frac{1}{2}c^4 = a^2c^2 + b^2c^2$,得

$$\left(a^2 - \frac{1}{2}c^2\right)^2 + \left(b^2 - \frac{1}{2}c^2\right)^2 = 0.$$

易知 $a^2 = \frac{1}{2}c^2$ 且 $b^2 = \frac{1}{2}c^2$.

所以,$a = b$ 且 $a^2 + b^2 = c^2$.

因此,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

四、能.

设任意8个连续的正整数为

$a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6, a+7$.

将其分为如下两组

$\{a+1, a+2, a+4, a+7\}$, $\{a, a+3, a+5, a+6\}$

即满足要求.

验证如下.

先将任意8个连续的正整数按如下分为等和的两组,满足

$$a+(a+1)+(a+6)+(a+7) = (a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5).$$

则 $[(a)+(a+1)]\cdot 1 + [(a+6)+(a+7)]\cdot 1 = [(a+2)+(a+3)]\cdot 1 + [(a+4)+(a+5)]\cdot 1$,

即 $[(a)+(a+1)][(a+1)-a] + [(a+6)+(a+7)][(a+7)-(a+6)] = [(a+2)+(a+3)][(a+3)-(a+2)] + [(a+4)+(a+5)][(a+5)-(a+4)]$.

故 $(a+1)^2 - a^2 + (a+7)^2 - (a+6)^2 = (a+3)^2 - (a+2)^2 + (a+5)^2 - (a+4)^2$,

也就是

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + (a+7)^2 = a^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2.$$

于是,分任意8个连续的正整数为如下两组:

$\{a+1, a+2, a+4, a+7\}$, $\{a, a+3, a+5, a+6\}$,

则满足

$$(a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + (a+7)^2 = a^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + (a+6)^2.$$

五、联结 AD.注意到

$S_{\triangle ABC_1} = \dfrac{S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD}}{2}$,则

$$2S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD}. \quad ①$$

同理,联结 BE、CF,分别有

$$2S_{\triangle BCD_1} = S_{\triangle BCD} + S_{\triangle BCE}; \quad ②$$

$$2S_{\triangle CDE_1} = S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CDF}; \quad ③$$

$$2S_{\triangle DEF_1} = S_{\triangle DEF} + S_{\triangle DEA}; \quad ④$$

$$2S_{\triangle EFA_1} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle EFB}; \quad ⑤$$

$$2S_{\triangle FAB_1} = S_{\triangle FAB} + S_{\triangle FAC}. \quad ⑥$$

相加得

$$\begin{aligned}
&2(S_{\triangle ABC_1} + S_{\triangle BCD_1} + S_{\triangle CDE_1} + S_{\triangle DEF_1} + S_{\triangle EFA_1} + S_{\triangle FAB_1}) \\
&= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle DEF} + S_{\triangle EFA} + S_{\triangle FAB} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CDF} + S_{\triangle DEA} + S_{\triangle EFB} + S_{\triangle FAC} \\
&= (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle FAC}) + (S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}) + (S_{\triangle BCE} + S_{\triangle CDE}) + (S_{\triangle CDF} + S_{\triangle DEF}) + (S_{\triangle DEA} + S_{\triangle EFA}) + (S_{\triangle EFB} + S_{\triangle FAB}) \\
&= S_{四边形FABC} + S_{四边形ABCD} + S_{四边形BCDE} + S_{四边形CDEF} + S_{四边形DEFA} + S_{四边形EFAB} \\
&= (S_{四边形FABC} + S_{四边形CDEF}) + (S_{四边形ABCD} + S_{四边形DEFA}) + (S_{四边形BCDE} + S_{四边形EFAB}) \\
&= S_{六边形ABCDEF} + S_{六边形ABCDEF} + S_{六边形ABCDEF} \\
&= 3S.
\end{aligned}$$

故 $2m = 3S \Rightarrow S = \frac{2}{3}m$.

(周春荔 整理)