2013年新知杯上海市初中数学竞赛试题

一、填空题：（每题 10 分）

1. 已知 $a=\frac{1}{2+\sqrt{7}}$，$b=\frac{1}{2-\sqrt{7}}$，则 $a^3-a+b^3-b=$______________.

分析：结果式子是对称式，因此需要计算两数之和与两数之积.

$$a+b=\frac{1}{2+\sqrt{7}}+\frac{1}{2-\sqrt{7}}=\frac{2-\sqrt{7}+2+\sqrt{7}}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})}=-\frac{4}{3},\quad a\times b=\frac{1}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})}=-\frac{1}{3},$$

$\therefore a^3-a+b^3-b=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(a+b)=(a+b)[(a+b)^2-3ab)-(a+b)$

$=(-\frac{4}{3})[(-\frac{4}{3})^2-3(-\frac{1}{3})]-(-\frac{4}{3})=-\frac{64}{27}$.

2. 已知直线 $l_1 // l_2 // l_3 // l_4$，直线 $m_1 // m_2 // m_3 // m_4$，$S_{ABCD}=100$，$S_{ILKJ}=20$，则 $S_{EFGH}=$____________.

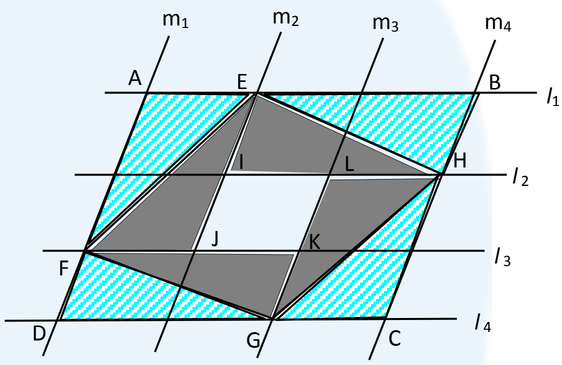
分析：用割补法，把 EHGF 四条“边”上的三角形移到 ABCD 四个“角”上，它们的面积相等.

$\because$ $S_{AFE}=S_{JFE}$，$S_{BEH}=S_{IEH}$，

$S_{CHG}=S_{LHG}$，$S_{DFG}=S_{KFG}$，

$\therefore$ $2S_{EFGH}=S_{ABCD}+S_{ILKJ}=120$，

$\therefore$ $S_{EFGH}=60$.



3. 已知∠A＝90°，AB=6，AC=8，E,F 在 AB 上，且 AE=2，BF=3，过 E 作 AC 的平行线交 BC 于 D，FD 的延长线交 AC 的延长线于 G，则 GF=____________.

分析：GF 在直角三角形 AFG 中，AF 的长已知，关键是求 AG. 图中有平行线，所以要用到平行线截得成比例线段定理.

解：在△ABC 中，$\because$ $DE // AC$，$\therefore \frac{DE}{AC}=\frac{AE}{AC}=\frac{4}{6}$，而 AC=8，

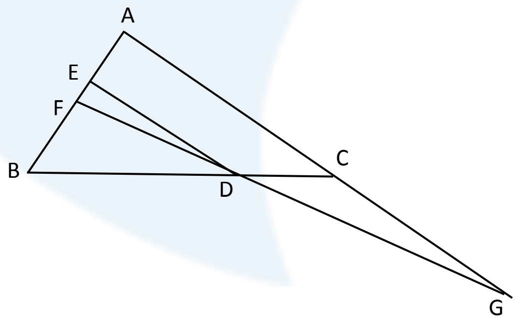
$\therefore DE=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3}$，

在△AFG 中，$\because$ $DE // AG$，$\therefore \frac{DE}{AG}=\frac{FE}{FA}=\frac{1}{3}$，而 $DE=\frac{16}{3}$，

$\therefore AG=3DG=16$.

在 Rt△AFG 中，

$AG=\sqrt{AF^2+AG^2}=\sqrt{3^2+16^2}=\sqrt{265}$.



4. 已知凸五边形的边长为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，$f(x)$ 为二次三项式，当 $x=a_1$ 或者 $x=a_2+a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=5$，当 $x=a_1+a_2$ 时，$f(x)=p$，当 $x=a_3+a_4+a_5$ 时，$f(x)=q$，则 $p-q=$____________.

分析： ∵ $f(x)$ 为二次三项式，∴二次函数 $y=f(x)$ 的图像是一条抛物线，

∵ a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 是（凸）五边形的边长，∴不妨把这条抛物线画成开口向上的，如图.

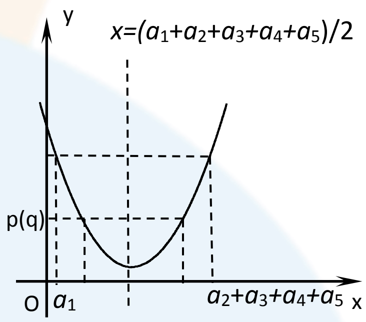
不妨设 $0<a_1<a_2+a_3+a_4+a_5$，依题有：$f(a_1)=f(a_2+a_3+a_4+a_5)$（=5 是没有作用的），这说明抛物线的对称轴是直线：$x=\dfrac{a_1+(a_2+a_3+a_4+a_5)}{2}$，

又∵ $x=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2}=\dfrac{(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)}{2}$，

∴在 x 轴上，点 a_1+a_2 与点 $a_3+a_4+a_5$ 是关于对称轴 $x=\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{2}$ 对称的两点，

∴ $f(a_1+a_2)=f(a_3+a_4+a_5)$，即 $p=q$，

∴ $p-q=0$.



5. 已知一个三位数是 35 的倍数，且各个数位上的数字之和为 15，则这个三位数是__________.

分析： 数字之和为 15，这说明该三位数一定是 3 的倍数，又因为该数是 35 的位数，所以它一定是 105 的倍数，经检验 735 是唯一解.

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+(m+1)(m+2)=0$ 对于任意实数 a 都有实数根，则 m 的取值范围是__________.

分析： 原方程对于任意实数 a 都有实数根 ⇔ $\Delta=a^2-4(m+1)(m+2)\geq 0$ 即 $(m+1)(m+2)\leq\dfrac{a^2}{4}$ 对于任意实数 a 都成立，注意到要求的是 m 的取值范围，而右边有最小值 0，故只须

$(m+1)(m+2)\leq(\dfrac{a^2}{4})_{最小值}=0$，∴ $(m+1)(m+2)\leq 0$，∴ $-2\leq m\leq -1$.

7. 已知四边形 ABCD 的面积为 2013，E 为 AD 上一点，△BCE, △ABE, △CDE 的重心分别是 G_1, G_2, G_3，那么 $\triangle G_1G_2G_3$ 的面积为

分析：三角形三条中线的交点称为重心．重心的基本性质是：重心到一边中点的连线长等于所在中线的 $\dfrac{1}{3}$．据此，

过点 G_1 作 BC 的平行线，交 BA 于 M，∵ G_1 是△BCE 的重心，∴BM=$\dfrac{1}{3}$BA，

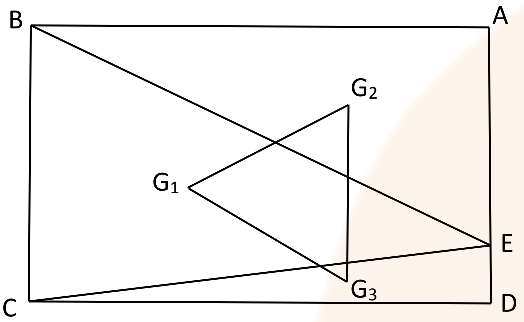
过点 G_2 作 BC 的平行线，交 BA 于 N，∵ G_2 是△ABE 的重心，∴NA=$\dfrac{1}{3}$BA，

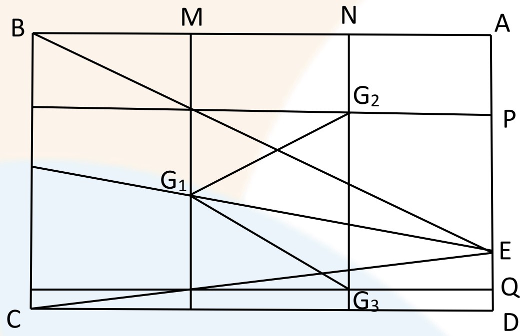
过点 G_2 作 BA 的平行线，交 AD 于 P，∵ G_2 是△ABE 的重心，∴AP=$\dfrac{1}{3}$AE，

过点 G_3 作 BA 的平行线，交 AD 于 Q，∵ G_2 是△CDE 的重心，∴DQ=$\dfrac{1}{3}$DE，

$\therefore PQ=PE+EQ=\frac{2}{3}AE+\frac{2}{3}ED=\frac{2}{3}AD$，而△G₁G₂G₃的 G₂G₃边上的高=$\frac{1}{3}AB$，

$\therefore$△$G_1G_2G_3$的面积=$\frac{2}{3}AD\times\frac{1}{3}AB=\frac{2}{9}$四边形 ABCD 的面积=$\frac{2}{9}\times 2013=\frac{671}{3}$.





8. 直角三角形斜边 AB 上的高 CD=3，延长 DC 到 P，使得 CP=2，过 B 作 BF⊥AP，交 CD 于 E，交 AP 于 F，则 DE=__________.

分析：本题涉及到直角三角形斜边上的高，就要考虑射影定理，即，直角边上的高是两直角边在斜边上的射影的比例中项；

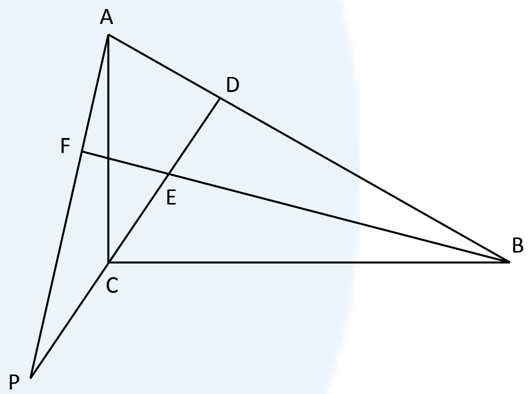
本题涉及到两个角的两边分别垂直，就要考虑到这两个角相等；

既然有角相等，就要考虑相似三角形.

∵∠DBE=∠P，∠DBE =∠PAD，∴△ADP∽△EDB，

$\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{BD}{PD}$，

$\therefore DE=\frac{AD\cdot BD}{PD}=\frac{CD^2}{PD}=\frac{9}{5}$.



二、解答题：（第 9 题、第 10 题 15 分，第 11 题、第 12 题 20 分）

9．已知∠BAC=90°，四边形 ADEF 是正方形且边长为 1，求 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$ 的最大值.

分析：本题需从结论入手，如果按常规通分，那是死路一条．于是考虑用特殊变形．注意到正方形边长为 1，即 DE=EF=1，代入到前两项的分子中，就成为比例式．不妨一试：

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{EF}{AB}+\frac{DE}{AC}+\frac{1}{BC}=\frac{CE}{BC}+\frac{BE}{BC}+\frac{1}{BC}=1+\frac{1}{BC}$，

因此，欲求 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$ 的最大值只需求 BC 的最小值.

而 $BC^2=AB^2+AC^2==(1+BD)^2+(1+FC)^2=BD^2+FC^2+2(BD+FC)+2$

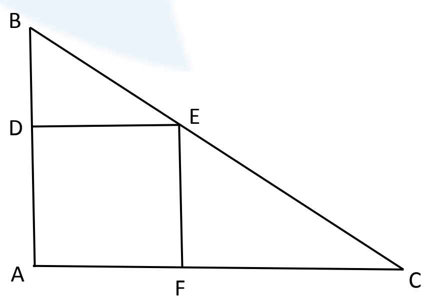
这里需要用基本不等式 $a^2+b^2\geq 2ab$ 和 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$（$a,b>0$）吗？

试一试：

$BD^2+FC^2\geq 2BD\cdot FC$（等号当且仅当 $BD=FC$ 取得），

$BD+FC\geq 2\sqrt{BD\cdot FC}$（等号当且仅当 $BD=FC$ 取得），

等号取得的条件是一致的！只需要证实 $BD\cdot FC$ 是常数即可.



考查含有 BD 和 FC 的两个三角形，即△BDE 和△EFC，它们是相似的！

于是，∵△BDE∽△EFC，∴ $\frac{BD}{DE}=\frac{EF}{FC}$，

∴ $BD\cdot FC=DE\cdot EF=1$，

∴ $BC^2=BD^2+FC^2+2(BD+FC)+2\geq 2BD\cdot FC+4\sqrt{BD\cdot FC}+2=8$，

∴ $BC\geq 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $BD=FC$ 时等号成立，此时 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\leq 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$ 的最大值是 $1+\frac{\sqrt{2}}{4}$．

10. 已知是不为 0 的实数, 求解方程组:

$$\begin{cases} xy-\frac{x}{y}=a & (1) \\ xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a} & (2) \end{cases}$$

分析：可考虑两式相减，得：$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}=a-\frac{1}{a}$，∴ $\frac{y^2-x^2}{xy}=a-\frac{1}{a}$ 似乎越走越远．

可考虑两式直接相乘，仍然得不到有益结果．将两式化成如下形式：

$$\begin{cases} xy-a=\frac{x}{y} & (3) \\ xy-\frac{1}{a}=\frac{y}{x} & (4) \end{cases}$$

再将两式相乘，得 $x^2y^2-xy(a+\frac{1}{a})+1=1$，注意到 $xy\neq 0$，

立即可得：$xy=a+\frac{1}{a}$，代入（1）得：$\frac{x}{y}=\frac{1}{a}$，∴这是很漂亮的结果！

乘胜前进：

由 $\begin{cases} xy=a+\frac{1}{a} \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{a} \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \\ y=\sqrt{a^2+1} \end{cases}$，或 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \\ y=-\sqrt{a^2+1} \end{cases}$．

11．已知 $n>1$，a_1，a_2，a_3，…，a_n 为整数且 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n$=2013，求 n 的最小值．

分析：既然 $n>1$ 且 a_1，a_2，a_3，…，a_n 为整数，那么我们就从 $n=2,3,4$ 试起，没有发现适合的．当 $n=5$ 时，取 $a_1=a_2$ =−1，$a_3=a_4$=1，$a_5=2013$，

则有　$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$=−1+(−1)+1+1+2013=2013,

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$=（−1）×(−1)　×1×1×2013=2013,

以下证明 $n\leq 4$ 时没有适合条件的．不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n$，

分两种情况：

⑴当 a_1，a_2，a_3，…，a_n 均为正整数时：

由 $a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n$=2013 知，a_1，a_2，a_3，…，a_n 均为 2013 的正约数，注意到 2013=3×11×61，欲 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ =2013 且 $n\leq 4$，则 $a_n\geqslant$671，所以 a_n=671 或 2013，经验算，n=2, 3, 4 均不可能；

⑵当 a_1，a_2，a_3，…，a_n 中有负整数时：

由 $a_1\ a_2\ a_3\cdots a_n$=2013 且 $n\le 4$ 可知，其中有且只有两个负数，即 $a_1\leqslant a_2$<0.

若 n=4 时，且 a_4= 2013，则 2013= $a_1+a_2+a_3+a_4=a_1+a_2+a_3$+2013，所以 $a_3=-(a_1+a_2)$

这时 2013 的正约数 a_3 是另外两个负约数的和的绝对值，经检验是不可能的；

若 n=4，且 a_4<2013，即 0< $a_4\leqslant$671，则无法使得 $a_1+a_2+a_3+a_4$=2013 成立；

若 $n=3$，则由 $a_1\leqslant a_2$<0 和 $a_1+a_2+a_3$=2013 知，$a_3\geqslant$2013，这时 2013 的正约数 a_3 是另外两个负约数的和的绝对值，经检验是不可能的；

若 $n=2$，由 $a_1\leqslant a_2$<0 知 $a_1+a_2\leqslant$0<2013，也是不合要求的.

综上可知，n 的最小值为 5.

12．已知正整数 a,b,c,d 满足 $a^2=c(d+13)$，$b^2=c(d-13)$，求所有满足条件的 d 的值.

分析：设 $(a,b)=\omega$，则 $a=\omega\cdot m$，$b=\omega\cdot n$，所以 $(m,n)=1$，

将题设两个等式相除，得 $\frac{a^2}{b^2}=\frac{d+13}{d-13}$，于是有 $\frac{m^2}{n^2}=\frac{d+13}{d-13}$，

又设 $\begin{cases} d+13=km^2 & (1) \\ d-13=kn^2 & (2) \end{cases}$，

(1)−(2)得：$k(m+n)(m-n)=2\times 13$，

由于 $m+n$ 与 $m-n$ 同奇偶，若 $m+n$、$m-n$ 同为偶数，则 $k(m+n)(m-n)$ 是 4 的倍数，不可能为 26，所以 $m+n$、$m-n$ 同为奇数且 $k=2$，

因此 $m+n$=13，$m-n$=1，得到 $m=7$，$n=6$，

代入(1)，得 $d+13=2\cdot 7^2$，所以 $d=85$，且为唯一解.