2014 年上海市初中数学竞赛

（考试时间 120 分钟，总分 150 分）

一、 填空题（每题 10 分，共 80 分）

1. 化简：$\dfrac{a^3-a^2b-ab^2+b^3}{a^2-2|ab|+b^2}=$________________.

2. 若 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}=a$，$\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=b$，$\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}=c$，则 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$ 的值为________________.

3. 已知 $ABCD$ 是等腰梯形，$AB\parallel CD$，$AB=6$，$CD=16$．ΔACE 是直角三角形，$\angle AEC=90^\circ$，$CE=BC=AD$，则 AE 的长为________________.

4. 方程 $xyz+xy+yz+zx+x+y+z=2014$ 的非负整数解 (x,y,z) 的组数为________________.

5. 在三角形 ABC 中，$\angle ABC = 44^\circ$，D 是边 BC 上一点，满足 $DC = 2AB$，$\angle BAD = 24^\circ$，则 $\angle ACB$ 的大小为________________.

6. 在直角坐标平面 xOy 上，由不等式 $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| \le 2 \\ \big||x|-|y|\big| \le 1 \end{cases}$，确定的区域的面积为________________.

7. 使得关于 x 的方程 $a^2x^2 + ax + 1 - 13a^2 = 0$ 有两个整数根的所有正实数 a 是________________.

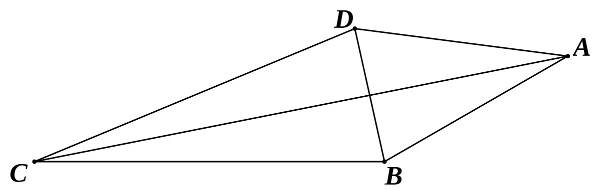
8. 设 2014^2 的所有正约数为 $d_1, d_2, \cdots, d_k$，则 $\dfrac{1}{d_1 + 2014} + \dfrac{1}{d_2 + 2014} + \cdots + \dfrac{1}{d_k + 2014} =$________.

二、 解答题（第 9、10 题 15 分，第 11、12 题 20 分，共 70 分）

9. 解关于 x 的方程 $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\left(a+1\right)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

10. 如图，在凸四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC+\angle CDA=300^\circ$， $AB\times CD=BC\times AD$，

求证： $AB\times CD=AC\times BD$.



11. 已知边长为 a 的正方形 $ABCD$ 的内部有 n 个圆，每个圆的面积都不大于 1，且与正方形 $ABCD$ 的边平行的直线都至多与一个圆相交．求证：这 n 个圆的面积之和小于 a.

12. （1）证明：可以将全体正整数分成 3 组 A_1, A_2, A_3，使得对每一个整数 $n \geq 15$，在 A_1, A_2, A_3 的每一组中都能取出两个不同的数，它们的和为 n.

（2）证明：将全体正整数任意分成 4 组 A_1, A_2, A_3, A_4，则对每一个整数 $n \geq 15$，在 A_1, A_2, A_3, A_4 中一定有一组 A_i，在 A_i 中不存在两个不同的数，它们的和为 n.