

竞赛之窗

2009 年北京市中学生数学竞赛(初二)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2010)01-0024-03

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 当 $m = -\frac{1}{6}$ 时,代数式

$$\frac{21-5m}{m^2-9} - \frac{m}{m^2-9} \div \frac{m}{m+3} - \frac{m-3}{m+3}$$

的值是().

- (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

2. 已知一个正八边形中最长的对角线等于 a , 最短的对角线等于 b . 则这个正八边形的面积等于().

- (A) $a^2 + b^2$ (B) $a^2 - b^2$
(C) $a + b$ (D) ab

3. 计算 $\frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \frac{1}{16 \times 21} +$

$\frac{1}{21 \times 26} + \frac{1}{26 \times 31} + \frac{1}{31 \times 36}$ 的值是().

- (A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{36}$ (C) $\frac{1}{33}$ (D) $\frac{1}{66}$

4. 已知 n 为正整数,记 $1 \times 2 \times \dots \times n = n!$ (如 $1! = 1, 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ 等). 若 $M = 1! \times 2! \times \dots \times 9!$, 则 M 的约数中是完全平方数的共有()个.

- (A) 504 (B) 672 (C) 864 (D) 936

5. 将 2 009 表示成两个整数的平方差的形式. 则不同的表示法有()种.

- (A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 计算 $\frac{45.1^3 - 13.9^3}{31.2} + 45.1 \times 13.9$ 的值等于_____.

2. 已知 $0 < a < 1$, 且

$$\left[a + \frac{1}{30} \right] + \left[a + \frac{2}{30} \right] + \dots + \left[a + \frac{29}{30} \right] = 18.$$

则 $[10a]$ 等于_____ ($[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数).

3. 如图 1, 在 $\square ABCD$ 中, $AD = a, CD = b$, 过点 B 分别作边 AD 、 CD 上的高 h_a, h_b . 已知 $h_a \geq a, h_b \geq b$, 对角线 $AC = 20$. 则 $\square ABCD$ 的面积为_____.

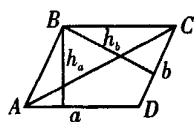


图 1

4. 已知 $\triangle ABC$, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的外角度数之比为 $\alpha : \beta : \gamma$ (α, β, γ 均为正数). 则 $\angle A : \angle B : \angle C$ 等于_____ (用含 α, β, γ 的式子之比表示).

5. 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 化简

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、(10 分) 设 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$.

(1) 求 $ab+bc+ca$ 的值;

(2) 求 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

四、(15 分) 如图 2,

在六边形 $ABCDEF$ 中,

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA,$$

且 $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$.

求证:

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F.$$

五、(15 分) (1) 证明: 由 2 009 个 1 和任意个 0 组成的自然数不是完全平方数;

(2) 试说明, 存在最左边 2 009 位都是 1 的形如 $\underbrace{11 \dots 1}_{2009 \text{ 个}} * \dots *$ 的自然数 (* 代表阿拉伯数码) 是完全平方数.

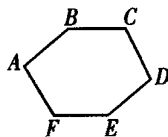


图 2

参考答案

1. A.

当 $m \neq \pm 3$ 时, 题设代数式有意义. 则

$$\begin{aligned} & \frac{21-5m}{m^2-9} - \frac{m}{m^2-9} \div \frac{m}{m+3} - \frac{m-3}{m+3} \\ &= \frac{21-5m}{m^2-9} - \frac{m+3}{m^2-9} - \frac{m-3}{m+3} \\ &= \frac{21-5m-m-3-m^2+6m-9}{m^2-9} \\ &= \frac{9-m^2}{m^2-9} = -1. \end{aligned}$$

由于 $m = -\frac{1}{6}$ 在该代数式的允许值范围之内, 故代入结果等于 -1 .

2. D.

如图 3, 在正八边形中, 最长的对角线为

$$AE = BF = CG$$

$$= DH = a,$$

最短的对角线为

$$AC = BD = CE$$

$$= DF = EG = FH$$

$$= GA = HB = b.$$

按图 3 所示进

行割补得

$$S_{\text{正八边形} ABCDEFGH} = S_{\text{四边形} PQMN} = ab.$$

3. B.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6 \times 11} + \frac{1}{11 \times 16} + \frac{1}{16 \times 21} + \\ & \frac{1}{21 \times 26} + \frac{1}{26 \times 31} + \frac{1}{31 \times 36} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{16} \right) + \\ & \frac{1}{5} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{21} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{26} \right) + \\ & \frac{1}{5} \left(\frac{1}{26} - \frac{1}{31} \right) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{36} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{36} \right) = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

4. B.

注意到

$$M = 1! \times 2! \times \dots \times 9!$$

$$= 2^8 \times 3^7 \times 4^6 \times 5^5 \times 6^4 \times 7^3 \times 8^2 \times 9$$

$$= 2^{30} \times 3^{13} \times 5^5 \times 7^3.$$

因为一个完全平方数 n 具有形式

$$n = 2^{2x} \times 3^{2y} \times 5^{2z} \times 7^{2w} \quad (x, y, z, w \in \mathbf{N}),$$

且 $2x \leq 30, 2y \leq 13, 2z \leq 5, 2w \leq 3,$

所以, 这样的 n 共有

$$16 \times 7 \times 3 \times 2 = 672 \text{ (个)}.$$

5. C.

设 $x^2 - y^2 = 2\,009$, 即

$$(x+y)(x-y) = 2\,009 = 7^2 \times 41.$$

则 2 009 有 6 个正因数, 分别为 1、7、41、49、287 和 2 009.

因此, 对应的方程组为

$$\begin{cases} x+y = -1, -7, -41, -49, -287, \\ \quad -2\,009, 1, 7, 41, 49, 287, 2\,009; \\ x-y = -2\,009, -287, -49, -41, -7, \\ \quad -1, 2\,009, 287, 49, 41, 7, 1. \end{cases}$$

故 (x, y) 共有 12 组不同的表示.

二、1. 3 481.

$$\begin{aligned} & \frac{45.1^3 - 13.9^3}{31.2} + 45.1 \times 13.9 \\ &= \frac{(45.1 - 13.9)(45.1^2 + 45.1 \times 13.9 + 13.9^2)}{45.1 - 13.9} + \\ & \quad 45.1 \times 13.9 \\ &= 45.1^2 + 2 \times 45.1 \times 13.9 + 13.9^2 \\ &= (45.1 + 13.9)^2 = 59^2 = 3\,481. \end{aligned}$$

2. 6.

由 $0 < a + \frac{1}{30} < a + \frac{2}{30} < \dots < a + \frac{29}{30} < 2$, 则

$$\left[a + \frac{1}{30} \right], \left[a + \frac{2}{30} \right], \dots, \left[a + \frac{29}{30} \right] = 0 \text{ 或 } 1.$$

由题设知, 其中有 18 个等于 1. 因此,

$$\left[a + \frac{1}{30} \right] = \left[a + \frac{2}{30} \right] = \dots = \left[a + \frac{11}{30} \right] = 0,$$

$$\left[a + \frac{12}{30} \right] = \left[a + \frac{13}{30} \right] = \dots = \left[a + \frac{29}{30} \right] = 1.$$

故 $0 < a + \frac{11}{30} < 1, 1 \leq a + \frac{12}{30} < 2$

$$\Rightarrow 18 \leq 30a < 19 \Rightarrow 6 \leq 10a < \frac{19}{3}$$

$$\Rightarrow [10a] = 6.$$

3. 200.

由 $h_a \geq a, h_b \geq b$, 此外, $a \geq h_b, b \geq h_a$, 则 $h_a \geq a \geq h_b \geq b \geq h_a$, 即 $h_a = a = h_b = b$, 这意味

着 $\square ABCD$ 是个正方形.

因为该正方形的对角线 $AC = 20$, 所以,
 $\square ABCD$ 的面积等于 200.

4. $(\beta + \gamma - \alpha) : (\gamma + \alpha - \beta) : (\alpha + \beta - \gamma)$.

设 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的外角分别为 αx 、 βx 、 γx . 由题意得

$$\alpha x + \beta x + \gamma x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = \frac{360^\circ}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle A &= 180^\circ - \frac{\alpha \cdot 360^\circ}{\alpha + \beta + \gamma} \\ &= \frac{(\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha)180^\circ}{\alpha + \beta + \gamma} \\ &= \frac{(\beta + \gamma - \alpha)180^\circ}{\alpha + \beta + \gamma}. \end{aligned}$$

$$\text{同理, } \angle B = \frac{(\gamma + \alpha - \beta)180^\circ}{\alpha + \beta + \gamma},$$

$$\angle C = \frac{(\alpha + \beta - \gamma)180^\circ}{\alpha + \beta + \gamma}$$

故 $\angle A : \angle B : \angle C$

$$= (\beta + \gamma - \alpha) : (\gamma + \alpha - \beta) : (\alpha + \beta - \gamma).$$

5. 2.

注意到

$$\begin{aligned} &\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} + \\ &\quad \sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \\ &= |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|. \end{aligned}$$

因为 $1 \leq x \leq 2$, 所以, $\sqrt{x-1}-1 \leq 0$.

$$\begin{aligned} \text{故 } &\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \\ &= \sqrt{x-1}+1 - (\sqrt{x-1}-1) = 2. \end{aligned}$$

三、(1) 因为 $a+b+c=0$, 所以,

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0. \end{aligned}$$

$$\text{又 } a^2 + b^2 + c^2 = 1, \text{ 则 } ab + bc + ca = -\frac{1}{2}.$$

$$(2) ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}.$$

又 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, 平方得

$$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 &= 1 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

四、如图 4, 联结

AE 、 EC 、 CA .

因为六边形内角和为 720° , 又 $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$, 所以,

$$\angle BAF +$$

$$\angle BCD + \angle DEF$$

$$= \angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360^\circ.$$

如图 4, 作 $\triangle EFP \cong \triangle CBA$, 联结 AP . 则

$$\begin{aligned} \angle AFP &= 360^\circ - \angle EFA - \angle PFE \\ &= 360^\circ - \angle EFA - \angle ABC \\ &= \angle CDE = \angle D. \end{aligned}$$

于是, $\triangle AFP \cong \triangle CDE \Rightarrow AP = CE$.

故 $\triangle ACE \cong \triangle EPA \Rightarrow \angle CAE = \angle PEA$.

$$\text{又 } \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B),$$

$$\angle FAE = \angle FEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle F),$$

故 $\angle BAC + \angle FAE$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle F)$$

$$= \frac{1}{2}(360^\circ - \angle B - \angle F) = \frac{1}{2}\angle D.$$

又 $\angle CAE = \angle PEA = \angle PEF + \angle AEF$

$$= \angle BAC + \angle FAE = \frac{1}{2}\angle D,$$

则 $\angle BAF = (\angle BAC + \angle FAE) + \angle CAE$

$$= \frac{1}{2}\angle D + \frac{1}{2}\angle D = \angle D,$$

即 $\angle A = \angle D$.

同理, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

(下转第 40 页)

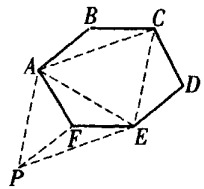


图 4

综上,当 AB 在 $\odot O$ 内平移时,总有 $CN > EM$.

二、(1)易知 a, b, c, t 均不为 0,有

$$\begin{cases} t = \frac{a-c}{b}, & \text{①} \\ b = c(1+t+t^2) & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b &= c \left[1 + \frac{a-c}{b} + \left(\frac{a-c}{b} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow b^3 &= b^2c + bc(a-c) + c(a^2 - 2ac + c^2) \\ \Rightarrow ca^2 + bca - 2c^2a + b^2c - bc^2 + c^3 - b^3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{③}$$

$$\Rightarrow ca^2 + c(b-2c)a - (b-c)(b^2+c^2) = 0.$$

因为 $c \neq 0$, 所以, a 是二次方程 $cx^2 + c(b-2c)x - (b-c)(b^2+c^2) = 0$

的根.

当方程有重根 a 时,

$$\begin{aligned} \Delta &= c^2(b-2c)^2 + 4c(b-c)(b^2+c^2) \\ &= b^2c(4b-3c) = 0. \end{aligned}$$

但 $bc \neq 0$, 得 $4b = 3c$, 代入式②得

$$3 = 4(1+t+t^2) \Leftrightarrow (2t+1)^2 = 0.$$

$$\text{解得 } t = -\frac{1}{2}.$$

(2)把 $a = 15, b = 7$ 代入式③得

$$c^3 - 37c^2 + 379c - 343 = 0.$$

由系数和为零,必有一解 $c = 1$, 则

$$(c-1)(c^2 - 36c + 343) = 0,$$

$$\text{即 } (c-1)[(c-18)^2 + 19] = 0.$$

因此, $c = 1$ 是唯一的取值.

$$\text{代入式①得 } t = \frac{a-c}{b} = \frac{15-1}{7} = 2.$$

$$\begin{aligned} \text{三、由 } \frac{m}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{20\,090\,908} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{20\,090\,908} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{20\,090\,907} \right) + \\ &\quad \cdots + \left(\frac{1}{10\,045\,454} + \frac{1}{10\,045\,455} \right) \\ &= \frac{20\,090\,909}{1 \times 20\,090\,908} + \frac{20\,090\,909}{2 \times 20\,090\,907} + \cdots + \\ &\quad \frac{20\,090\,909}{10\,045\,454 \times 10\,045\,455} \\ &= 20\,090\,909 \times \frac{p}{M}, \end{aligned}$$

其中, $M = 1 \times 2 \times \cdots \times 20\,090\,907 \times 20\,090\,908$, p 为正整数. 故

$$20\,090\,909 \times n \times p = M \times m.$$

这表明, $20\,090\,909 \mid M \times m$.

但 $20\,090\,909$ 为质数, 不能整除 M .

因此, $20\,090\,909 \mid m$.

于是, m 是吉祥数.

(罗增儒 陕西师范大学数学系, 710062)

罗 衾 广东省惠州市华罗庚中学, 516001)

(上接第 26 页)

五、(1)任意自然数可被表示为 $3k+r$ ($r=0,1,2$) 的形式, 而

$$(3k+r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2 \quad (r^2 = 0, 1, 4),$$

即 r^2 被 3 除余 0 或 1, 这意味着整数的平方被 3 除的余数为 0 或 1, 也就是被 3 除余 2 的数一定不是完全平方数.

设由 2 009 个 1 和任意个 0 组成的自然数为 A , A 的数字和为 2 009, 被 3 除余 2. 则 A 被 3 除余 2.

因此, A 不是完全平方数.

(2)注意到数

$$a = \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \underbrace{55 \cdots 5}_{2\,008\text{个}} 6$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \times 10^{2\,009} + \underbrace{55 \cdots 5}_{2\,009\text{个}} + 1 \\ &= \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \times 10^{2\,009} + 5 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} + 1 \\ &= \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \times (9 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} + 1) + 5 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} + 1 \\ &= 9 \times \left(\underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \right)^2 + 5 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} + 1 \\ &= \left(3 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \right)^2 + 6 \times \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} + 1 \\ &= \left(\underbrace{33 \cdots 3}_{2\,009\text{个}} + 1 \right)^2 = \left(\underbrace{33 \cdots 34}_{2\,008\text{个}} \right)^2. \end{aligned}$$

则 $a = \underbrace{11 \cdots 1}_{2\,009\text{个}} \underbrace{55 \cdots 5}_{2\,008\text{个}} 6$ 是最左边 2 009 位都是 1 的完全平方数.

可见, 存在最左边 2 009 位都是 1 的完全平方数.

(李延林 提供)