2015 美国数学竞赛（十年级）

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2015)07-0026-07

1. 计算：$(2^0-1+5^2-0)^{-1}\times 5$ 的值为（　　）.

(A) -125　(B) -120　(C) 25　(D) $\frac{24}{5}$　(E) $\frac{1}{5}$

2. 箱子中放有三角形和正方形的瓷砖共 25 块，共有 84 条边. 则箱子中的正方形瓷砖有（　　）块.

(A)3　(B)5　(C)7　(D)9　(E)11

3. 如图 1，安琪儿用 18 根牙签拼三层楼梯. 照这样计算，要想拼五层楼梯，她还需（　　）根牙签.

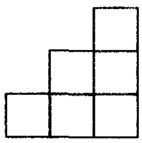

图 1

(A)9　(B)18　(C)20　(D)22　(E)24

4. 巴勃罗、索菲亚和米娅在一次聚会上各分得一些糖果. 巴勃罗的糖果数为索菲亚糖果数的 3 倍，索菲亚的糖果数为米娅糖果数的 2 倍. 巴勃罗决定将自己的糖果分给索菲亚和米娅一部分，这样三个人的糖果数相等. 则巴勃罗分给索菲亚的糖果数占自己原来糖果数的（　　）.

(A) $\frac{1}{12}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{1}{4}$　(D) $\frac{1}{3}$　(E) $\frac{1}{2}$

5. 帕特里克先生是 15 名学生的数学老师. 一次测验后他发现，去掉佩顿的成绩，其余人的平均成绩为 80 分，加上佩顿的成绩后，全班的平均成绩为 81 分. 则在这次考试中，佩顿的成绩为（　　）分.

(A)81　(B)85　(C)91　(D)94　(E)95

注意到，

$$\angle DI_1C=90^\circ+\frac{1}{2}\angle DAC=\angle DI_2C.$$

于是，D、I_1、I_2、C 四点共圆.

则 $\angle DI_1E=\angle DCI_2$，$\angle CI_2F=\angle CDI_1$.

故 $\angle GEF=\angle EDI_1+\angle DI_1E$

$=\angle ADI_1-\angle ADB+\angle DCI_2$

$=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle BCD)-\angle ADB$，

$\angle GFE=\angle FCI_2+\angle FI_2C$

$=\angle BCI_2-\angle BCA+\angle CDI_1$

$=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle BCD)-\angle ADB.$

从而，$\angle GEF=\angle GFE$，得 $GE=GF$.

又 GI_3 平分 $\angle AGB$，故 $GI_3\perp EF$.

14. 若一共有 13 个数，则可排列如下：

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_8,a_9$，

$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_9,a_{10}$，

$a_3,a_4,a_5,\cdots,a_{10},a_{11}$，

$a_4,a_5,a_6,\cdots,a_{11},a_{12}$，

$a_5,a_6,a_7,\cdots,a_{12},a_{13}$.

由已知，其中每行数之和为正，从而，数表中所有数之和为正；另一方面，数表中每列数之和为负，从而，数表中所有数之和为负. 矛盾. 这表明，满足要求的数串至多有 12 项.

考虑如下的一串数字：

-4、-4、-4、15、-4、-4、-4、-4、15、-4、-4、-4，

这串数满足题中要求且有 12 项，故知满足题中要求的 n 的最大值为 12.

（张宇鹏　提供）

6. 已知两个正数的和是差的 5 倍. 则较大数与较小数之比为(　　).

(A)$\frac{5}{4}$　(B)$\frac{3}{2}$　(C)$\frac{9}{5}$　(D)2　(E)$\frac{5}{2}$

7. 等差数列 13,16,19,…,70,73 中,共有(　　)项.

(A)20　(B)21　(C)24　(D)60　(E)61

8. 两年前,皮特的年龄为其表弟克莱尔年龄的 3 倍;四年前,皮特的年龄为克莱尔年龄的 4 倍. (　　)年后,皮特和克莱尔的年龄比为 2∶1.

(A)2　(B)4　(C)5　(D)6　(E)8

9. 已知两个圆柱的体积相同,第二个圆柱半径比第一个圆柱半径多 10%. 下列叙述正确的为(　　).

(A)第二个圆柱比第一个圆柱低 10%

(B)第一个圆柱比第二个圆柱高 10%

(C)第二个圆柱比第一个圆柱低 21%

(D)第一个圆柱比第二个圆柱高 21%

(E)第二个圆柱的高是第一个圆柱高的 80%

10. 对于字母排列 abcd,有(　　)种不同的重排,使得原来排列中相邻的两个字母重排后不能相邻(如 ab、ba 在重排后不能出现).

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)4

11. 已知矩形的长与宽之比为 4∶3,对角线的长为 d. 若用 kd^2 表示矩形的面积,则 k 的值为(　　).

(A)$\frac{2}{7}$　(B)$\frac{3}{7}$　(C)$\frac{12}{25}$　(D)$\frac{16}{25}$　(E)$\frac{3}{4}$

12. 已知 $A(\sqrt{\pi}, a)$、$B(\sqrt{\pi}, b)$ 为曲线 $y^2+x^4=2x^2y+1$ 上的两不同点. 则 $|a-b|$ 的值为(　　).

(A)1　(B)$\frac{\pi}{2}$　(C)2

(D)$\sqrt{1+\pi}$　(E)$1+\sqrt{\pi}$

13. 克劳迪娅有 5 分和 10 分的硬币共 12 枚,用这些硬币中的一部分或者全部硬币恰可以组合成 17 种不同的币值. 则克劳迪娅有(　　)枚 10 分的硬币.

(A)3　(B)4　(C)5　(D)6　(E)7

14. 钟表圆盘的半径为 20 厘米,它与另一个半径为 10 厘米的小圆盘在 12 点位置外切,小圆盘上有一个固定指针,开始时指针竖直指向上方. 当小圆盘按顺时针方向沿大表盘外沿滚动,且始终保持相切,直到小圆盘上的指针再一次竖直指向上方时停止. 此时,两圆盘外切的切点位于大表盘上的(　　)点位置.

(A)2　(B)3　(C)4　(D)6　(E)8

15. 考虑分数 $\frac{x}{y}$(x、y 为两个互素的正整数)组成的集合. 若分子和分母均增加 1,则分数的值增加 10%. 那么,集合中这样的分数有(　　)个.

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

(E)无数多

16. 若 $y+4=(x-2)^2$,$x+4=(y-2)^2$,且 $x\neq y$,则 x^2+y^2 的值为(　　).

(A)10　(B)15　(C)20　(D)25　(E)30

17. 一条经过坐标原点的直线,与直线 $x=1$、$y=1+\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 围成一个等边三角形. 则这个等边三角形的周长为(　　).

(A)$2\sqrt{6}$　(B)$2+2\sqrt{3}$　(C)6

(D)$3+2\sqrt{3}$　(E)$6+\frac{\sqrt{3}}{3}$

18. 已知十六进制数是由 0 ~ 9 十个数码和 A 至 F 六个字母构成的,其中,A,B,…,F 分别代表 10,11,…,15. 在前 1 000 个正整数中,找出所有只用数码表示的十六进制数. 求出这些数的个数 n,此时,n 的各位数码之和为(　　).

(A)17　(B)18　(C)19　(D)20　(E)21

19. 在等腰 Rt△ABC 中,已知 $BC=AC$,

$\angle C=90°$,面积为12.5,$\angle ACB$的三等分线分别与斜边AB交于点D、E. 则$\triangle CDE$的面积为( ).

(A)$\frac{5\sqrt{2}}{3}$ (B)$\frac{50\sqrt{3}-75}{4}$

(C)$\frac{15\sqrt{3}}{8}$ (D)$\frac{50-25\sqrt{3}}{2}$ (E)$\frac{25}{6}$

20. 一个矩形的长和宽均为正整数,面积为A平方厘米,周长为P厘米. 则下面不可能为$A+P$的数是( ).

(A)100 (B)102 (C)104

(D)106 (E)108

21. 在四面体$ABCD$中,已知$AB=5$,$AC=3$,$BC=4$,$BD=4$,$AD=3$,$CD=\frac{12\sqrt{2}}{5}$. 则四面体$ABCD$的体积为( ).

(A)$3\sqrt{2}$ (B)$2\sqrt{5}$ (C)$3\sqrt{3}$

(D)$\frac{24}{5}$ (E)$\frac{24\sqrt{2}}{5}$

22. 八人围坐在一张圆桌旁,每人面前放着一枚完全相同的硬币,所有人同时翻转自己的硬币. 若硬币的头像朝上,则这个人站起来;若硬币的头像朝下,则这个人继续坐着. 那么,没有相邻的两人站起来的概率为( ).

(A)$\frac{47}{256}$ (B)$\frac{3}{16}$ (C)$\frac{49}{256}$

(D)$\frac{25}{128}$ (E)$\frac{51}{256}$

23. 若函数$f(x)=x^2-ax+2a$的零点为整数,则系数a的所有可能值之和为( ).

(A)7 (B)8 (C)16 (D)17 (E)18

24. 已知四边形$ABCD$各边长均为正整数,周长为p,$\angle B$与$\angle C$均为直角,$AB=2$,$CD=AD$. 若$p<2\,015$,则正整数p有( )个不同的可能值.

(A)30 (B)31 (C)61 (D)62 (E)63

25. 设U是边长为1的正方形,在U的边上任取两点,这两点的距离不小于$\frac{1}{2}$的概率为$\frac{a-b\pi}{c}$(a、b、$c\in\mathbf{Z}_+$,$(a,b,c)=1$). 则$a+b+c$的值为( ).

(A)59 (B)60 (C)61 (D)62 (E)63

参考答案

1. E.

$(2^0-1+5^2-0)^{-1}\times5=\frac{1}{25}\times5=\frac{1}{5}$.

2. D.

设箱子中有a块三角形瓷砖,b块正方形瓷砖.

依题意得

$$\begin{cases}a+b=25,\\3a+4b=84\end{cases}\Rightarrow(a,b)=(16,9).$$

3. D.

如图2,注意到,拼一层楼梯需要4根牙签;拼两层楼梯需要10根牙签,增加6根;拼三层楼梯需要18根牙签,增加8根. 于是,增加的牙签数成等差数列. 从而,要拼5层楼梯,需要增加$10+12=22$根牙签.

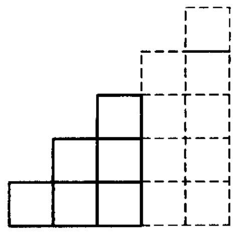

图2

4. B.

设米娅的糖果数为m. 于是,索菲亚的糖果数为$2m$,巴勃罗的糖果数为$6m$.

若三人的糖果数一样多,则每人应有糖果数$\frac{m+2m+6m}{3}=3m$.

因此,巴勃罗要给索菲亚m块糖果,给米娅$2m$块糖果.

从而,巴勃罗给索菲亚的糖果数占自己原来糖果数的$\frac{m}{6m}=\frac{1}{6}$.

5. E.

$15\times81-14\times80=1\,215-1\,120=95$.

6. B.

设这两个正数为 a、$b(a>b)$.

由题意得 $a+b=5(a-b)\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$.

7. B.

注意到,该等差数列的首列为 13,公差为 3,末项为 73. 故其项数为$\frac{73-13}{3}+1=21$.

8. B.

设两年前皮特的年龄为 $3x$,克莱尔的年龄为 x;y 年后,皮特与克莱尔的年龄之比为 2∶1.

则由题意知

$$\begin{cases}\frac{3x-2}{x-2}=4,\\ \frac{3x+2+y}{x+2+y}=\frac{2}{1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6,\\ y=4.\end{cases}$$

所以,4 年后皮特与克莱尔的年龄之比为2∶1.

9. D.

设第一个圆柱半径为 r_1,第二个圆柱半径为 r_2. 则由题意得

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{11}{10}.$$

又$\pi r_1^2h_1=V_1=V_2=\pi r_2^2h_2$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{121}{100}$$

$$\Rightarrow h_1=1.21h_2.$$

故第一个圆柱比第二个圆柱高 21%.

10. C.

对于排列 abcd 的不同重排,若 a 在首位,则第二位只能放 c 或 d,不妨设为 c. 此时,第三位没有字母可放. 若不然,放 b,则 cb 相邻;放 d,则 cd 相邻,矛盾. 于是,首位不能放 a.

类似地,也不能放 d.

若 b 在首位,则第二位只能放 d,第三位放 a,则末位放 c,即 bdac.

类似地,cadb 也符合.

故共有两个符合条件的重排.

11. C.

设矩形的长为 $4x$,宽为 $3x$. 则 $d=5x$.

于是,$x=\frac{d}{5}$.

故 $S=3x\cdot 4x=12x^2=\frac{12}{25}d^2\Rightarrow k=\frac{12}{25}$.

12. C.

由题意将 $x=\sqrt{\pi}$代入方程得

$$y^2+(\sqrt{\pi})^4=2(\sqrt{\pi})^2y+1$$

$$\Rightarrow (y-\pi)^2=1\Rightarrow y=\pi\pm 1.$$

故$|a-b|=|(\pi+1)-(\pi-1)|=2$.

13. C.

设克劳迪娅有 x 枚 5 分硬币,$12-x$ 枚 10 分的硬币. 则

$$5x+10(12-x)=120-5x=5(24-x).$$

由于用这些硬币恰可以组合成 17 种不同的币值,因此,

$$24-x=17\Rightarrow x=7.$$

从而,所求为 $12-7=5$.

14. C.

如图 3.

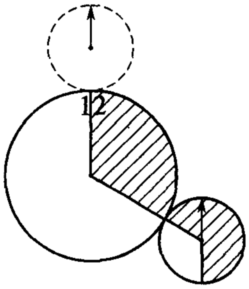

图 3

设在大圆运动的角位移为 θ. 则在小圆运动的角位移为 $360°-\theta$.

故 $20\theta=10(360°-\theta)\Rightarrow\theta=120°$.

从而,两圆盘外切于大表盘上的 4 点位置.

15. B.

由题意得

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{11x}{10y}\Rightarrow xy+11x-10y=0$$

$\Rightarrow (x-10)(y+11)=-110.$

由 x、y 为正整数知

$x-10>-10, y+11>11.$

故$(x-10, y+11)$

$=(-1,110),(-2,55),(-5,22)$

$\Rightarrow (x,y)=(9,99)$或$(8,44)$或$(5,11)$.

注意到,x、y 互素.

所以,$(x,y)=(5,11)$.

16. B.

由题意知 $x^2-4x=y, y^2-4y=x$.

两式相加得 $x^2+y^2=5(x+y)$,

两式相减得 $x^2-y^2=3(x-y)$.

由 $x\neq y$,知 $x+y=3$.

故 $x^2+y^2=5(x+y)=15$.

17. D.

如图 4.

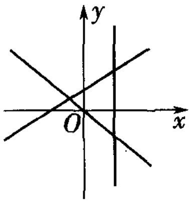

图 4

注意到,等边三角形的一条边经过坐标原点,另两边在直线 $x=1$ 和 $y=1+\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上. 则第三边的直线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

故三条直线交点为

$\left(1,1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

因此,正三角形边长为 $1+\frac{2\sqrt{3}}{3}$,周长为 $3+2\sqrt{3}$.

18. E.

注意到,表示 1 000 的十六进制数为 $(3E8)_{16}$. 要找的数为小于 1 000 且只用数码表示的十六进制数$(abc)_{16}$,则 a 可以取 0、1、2、3;b 可以取 0 ~ 9;c 也可以取 0 ~ 9,共有 400 个数,但 $0=(000)_{16}$非正整数,舍去.

于是,$n=399$.

从而,所求为 $3+9+9=21$.

19. D.

由题意知 $AB=AC=5$.

如图 5,过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F.

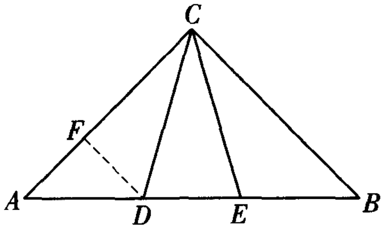

图 5

因为$\angle ACB=90°$, CD、CE 为$\angle ACB$ 的三等分线,所以,$\angle ACD=30°$.

则 $AF=DF, CF=\sqrt{3}DF$,

$AC=(1+\sqrt{3})DF=5$,

$DF=\frac{5}{\sqrt{3}+1}=\frac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$.

从而,$S_{\triangle ADC}=\frac{25(\sqrt{3}-1)}{4}$.

故 $S_{\triangle CDE}=\frac{25}{2}-\frac{25(\sqrt{3}-1)}{2}=\frac{50-25\sqrt{3}}{2}$.

20. B.

设一个矩形的长为 a,宽为 b,其中,a、$b\in \mathbf{Z}_+$, $a>b$.

则 $A+P=ab+2a+2b$

$\Rightarrow A+P+4=ab+2a+2b+4$

$=(a+2)(b+2)$,

即 $A+P+4$ 能分解成两个大于 2 的正整数之积.

但 $102+4=106=2\times 53$,故 $A+P$ 不可能为 102.

21. D.

如图 6,在四面体 $ABCD$ 中,取边 CD 的中点 E,联结 AE、BE.

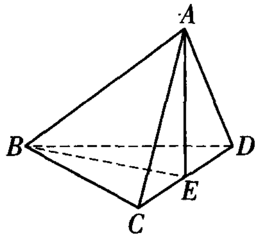

图 6

由题意知

$AE\perp CD$,

$BE \perp CD$.

于是,$CE \perp$平面 ABE.

由 $CD=\frac{12\sqrt{2}}{5}$,得 $CE=DE=\frac{6\sqrt{2}}{5}$.

从而,$AE=\frac{\sqrt{153}}{5}$,$BE=\frac{\sqrt{328}}{5}$.

则 $\cos\angle ABE=\frac{AB^2+BE^2-AE^2}{2AB\cdot BE}$

$$=\frac{25+\frac{328}{25}-\frac{153}{25}}{2\times5\times\frac{\sqrt{328}}{5}}=\frac{32}{2\sqrt{328}}=\frac{4\sqrt{82}}{41}$$

$\Rightarrow \sin\angle ABE=\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

故 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE\sin\angle ABE$

$$=\frac{1}{2}\times5\times\frac{\sqrt{328}}{5}\times\frac{3\sqrt{41}}{41}=3\sqrt{2}.$$

所以,四面体 $ABCD$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABE}\cdot CD=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}\times\frac{12\sqrt{2}}{5}=\frac{24}{5}.$$

22. A.

八人每人站着或坐着,共有 $2^8=256$ 种不同的排法.

下面分情形讨论.

(1)没有人站着,有 1 种排法;

(2)一人站着,有 $C_8^1=8$ 种不同排法;

(3)两人站着,但不相邻,有 $C_8^2-8=20$ 种不同排法;

(4)四人站着,但没有两人相邻,有 2 种不同排法;

(5)三人站着,但没有两人相邻,有 $\frac{8(3+2+1)}{3}=16$ 种不同排法;

(6)没有五人以上站着,若不然,其中必有两个相邻的人站着.

故 $P=\frac{1+8+20+2+16}{2^8}=\frac{47}{256}$.

23. C.

因为函数 $f(x)=x^2-ax+2a$ 的零点为整数,所以,由题意根据韦达定理,知 a 也为整数,且二次函数 $f(x)=x^2-ax+2a$ 的判别式为完全平方数.

设 $\Delta=a^2-8a=k^2(k\in\mathbf{N})$. 则

$a^2-8a+16=k^2+16$

$\Rightarrow(a-4)^2-k^2=16$

$\Rightarrow(a-4+k)(a-4-k)=16$.

由 $a-4+k$、$a-4-k$ 奇偶性相同,知

$(a-4+k,a-4-k)$

$=(8,2),(4,4),(-4,-4),(-2,-8)$.

解得 $a_1=9,a_2=8,a_3=0,a_4=-1$.

故系数 a 的所有可能值之和为 16.

24. B.

如图 7,设 $BC=x$,$AD=CD=y$. 过点 A 作 $AE\perp CD$ 于点 E.

由 $AB=2$,$\angle B=\angle C=90°$,知 $AE=BC=x$.

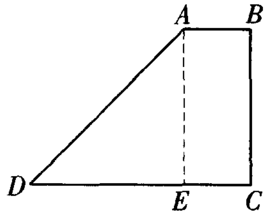

图 7

在 Rt$\triangle ADE$ 中,由勾股定理得

$y^2=(y-2)^2+x^2\Rightarrow x=2\sqrt{y-1}$.

故 $p=x+2y+2=2y+2\sqrt{y-1}+2$.

由题意知 $2y+2\sqrt{y-1}+2<2\ 015$,且 $y-1$为完全平方数,则设

$f(y)=2y+2\sqrt{y-1}+2(y\in[1,+\infty))$.

于是,$f(y)$单调递增.

注意到,

$f(32^2+1)=2\times(32^2+1)+2\times32+2$

$=2\ 116<2\ 015$,

$f(31^2+1)=2\times(31^2+1)+2\times31+2$

$=1\ 988<2\ 015$.

所以,$y=1^2+1,2^2+1,\cdots,31^2+1$.

从而，p 有 31 个不同的可能值.

25. A.

如图 8，将正方形 U 的各边二等分，即

$$AE=EB=BF=FC=CG=GD=DH=HA=\frac{1}{2}.$$

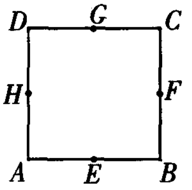

图 8

由轮换对称性，不妨设其中一点 S 在线段 AE 上，则当另一点 T 在 BF、FC、CG、GD、DH 上时，$P\left(|ST|\geqslant\frac{1}{2}\right)=1$.

当点 T 在 AE 上时，$P\left(|ST|\geqslant\frac{1}{2}\right)=0$.

当点 T 在 BE 上时，设 $AS=x$，$BT=y$. 则

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\\x+y\leqslant\frac{1}{2}.\end{cases}$$

如图 9.

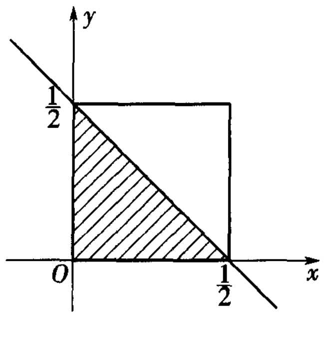

图 9

易知 $P\left(|ST|\geqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

当点 T 在 AH 上时，设 $AS=x$，$AH=y$. 则

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\\x^2+y^2\geqslant\frac{1}{4}.\end{cases}$$

如图 10.

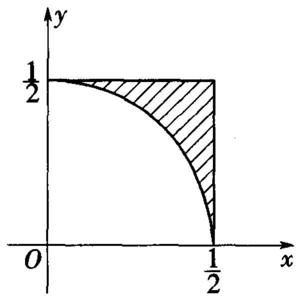

图 10

易知 $P\left(|ST|\geqslant\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{4-\pi}{4}$.

故 $P\left(|ST|\geqslant\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{4-\pi}{4}\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+0\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{26-\pi}{32}.$$

从而，$a+b+c=26+1+32=59$.

（吴建平 提供 潘 铁 翻译）

编 读 往 来

1. 扬州读者徐国云同志来信指出：本刊 2015 年第 3 期《数学奥林匹克初中训练题（173）》填空第 4 题答案应为 $(0,0)$ 或 $(-1,6)$.

2. 另有热心读者指出：2014 年第 4 期《数学奥林匹克问题》高 377 题目应改为“证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\sqrt{x_i})^2}\geqslant\frac{n^2}{2\left(n+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)}$”；2015 年第 4 期第 48 页右栏第 13、15 行中相应地改为“$n=2k+1$”.

感谢热心读者的指正. 由于错误给读者带来的不便我们深表歉意.

本刊编辑部