2006 我爱数学初中生夏令营数学竞赛

说明:第一试每小题 50 分,共 150 分,第二试每小题 15 分,共 150 分.

第 一 试

1. (1) 如果

$$4x^3-x^2-4x+2=(2x+\alpha)^2(x+\beta)+\gamma$$

是恒等式,求常数 α、β、γ;

(2) 已知 $|x|\leqslant 1$. 求代数式 $4x^3-x^2-4x+2$ 的最大值和最小值.

2. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与边 CA 上的中线 BM 交于点 G、H,并且点 G 在点 B 和点 H 之间. 已知 $BG=HM$,$AB=2$. 那么,当 BC、CA 为何值时,线段 GH 的长达到最大值?并求 GH 的最大值.

3. 给定一列正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,其中,$a_1=2^{2006}$,并且对于每一个正整数 i,a_{i+1} 等于 a_i 的各位数字之和的平方. 求 a_{2006} 的值.

第 二 试

1. 已知

$$12a^2+7b^2+5c^2\leqslant 12a|b|-4b|c|-16c-16.$$

则 $a=$______,$b=$______,$c=$______.

2. 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$,且满足 $a>b>c$,$a+b+c=0$. 那么,$\frac{c}{a}$ 的取值范围是______.

3. 代数式 $4-x^2-\sqrt{1-x^2}$ 达到最小值时,x 的值为______;代数式 $4-x^2-\sqrt{1-x^2}$ 达到最大值时,x 的值为______.

4. 已知 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切,它们的半径分别为 112、63,它们的内公切线被它们的两条外公切线截得的线段为 AB. 那么,AB 的长为______.

5. 已知在直角坐标系 xOy 中,正方形 $ABCD$ 的顶点 $A(-1,1)$,顶点 $C(1,1+2\sqrt{3})$. 那么,顶点 B、D 的坐标分别为______、______.

6. 在一个 m 行、n 列的方格表中,有 mn 个边长为 1 的小方格. 每个小方格用红、黄、蓝三种颜色中的一种颜色染色. 已知方格表的每一行有 6 个红色的小方格,每一列有 8 个黄色的小方格,整个方格表共有 15 个蓝色的小方格. 如果 n 是两位的质数,那么,$m=$______,$n=$______.

7. 方程 $\sqrt{\frac{2x-6}{x-11}}=\frac{3x-7}{x+6}$ 的解是______.

8. 设 a、b 为常数,并且 $b<0$,抛物线 $y=ax^2+bx+a^2+\sqrt{2}a-4$ 的图像为图 1 中的四个图像之一. 则 $a=$______.

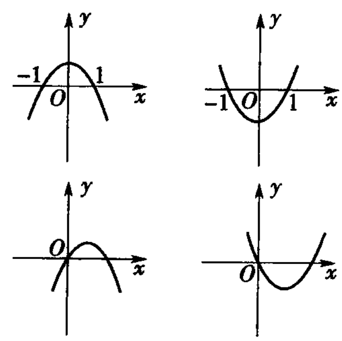

图 1

9. 如图 2,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=BC=5$,$AC=7$,$\triangle ABC$ 的内切圆 $\odot O$ 与边 AC 相切于点 M,过点 M 作平行于边 BC 的直线 MN 交 $\odot O$ 于点 N,过点 N 作 $\odot O$ 的切线交 AC 于点 P. 则 $MN-NP=$______.

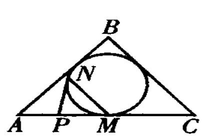

图 2

10. 已知某人用 12.1 万元购买了一辆汽车.如果每年需交保险费、养路费、汽油费合计 1 万元,汽车维修费第一年为 0 元,从第二年开始,每年比上一年增加 0.2 万元.那么,这辆汽车在使用______年后报废,才能使该汽车的年平均费用达到最小,该汽车的最小年平均费用是______万元.

参 考 答 案

第 一 试

1. (1) 注意到

$4x^3-x^2-4x+2=(2x+\alpha)^2(x+\beta)+\gamma$,

因此, $4x^3-x^2-4x+2$

$=4x^3+4(\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+4\alpha\beta)x+\alpha^2\beta+\gamma$.

经比较得 $\begin{cases}4(\alpha+\beta)=-1,\\ \alpha^2+4\alpha\beta=-4,\\ \alpha^2\beta+\gamma=2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\alpha=1,\\ \beta=-\dfrac{5}{4},\\ \gamma=\dfrac{13}{4}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha=-\dfrac{4}{3},\\ \beta=\dfrac{13}{12},\\ \gamma=\dfrac{2}{27}.\end{cases}$

(2) 注意到

$4x^3-x^2-4x+2$

$=(2x+1)^2\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{13}{4}\le\frac{13}{4}$,

且当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,上式中的等号成立,故 $4x^3-x^2-4x+2$ 的最大值为 $\frac{13}{4}$.

注意到

$4x^3-x^2-4x+2$

$=\left(2x-\frac{4}{3}\right)^2\left(x+\frac{13}{12}\right)+\frac{2}{27}\ge\frac{2}{27}$,

且当 $x=\frac{2}{3}$ 时,上式中的等号成立,故 $4x^3-x^2-4x+2$ 的最小值为 $\frac{2}{27}$.

2. 不妨设 $BC>AB$.如图 3,设 $\odot O$ 与边 BC、CA、AB 分别切于点 D、E、F.则 $AE=AF$.

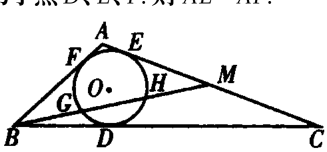

图 3

由切割线定理得

$EM=\sqrt{HM(HM+GH)}$

$=\sqrt{BG(BG+GH)}=BF$.

因此, $AM=AB=2$, $AC=2AM=4$.

设 $BC=2a$.由于 $BF=BD$, $CD=CE$,因此,

$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=3-a$,

$EM=FB=a-1$.

设 $GH=x$, $BG=HM=y$.则

$y(x+y)=(a-1)^2$. ①

由勾股定理知平行四边形的对角线的平方和等于它的四条边的平方和.因此,

$BM^2=\frac{1}{4}[2(AB^2+BC^2)-AC^2]$

$=\frac{1}{4}[2(2^2+4a^2)-4^2]=2a^2-2$,

$[y+(x+y)]^2=2a^2-2$. ②

由式①、②解得

$x=\sqrt{-2(a-2)^2+2}$,

其中, $4-2<2a<4+2$,即 $1<a<3$.

因此,当 $a=2$ 时, x 达到最大值 $\sqrt{2}$,即当 $AC=BC=4$ 时,线段 GH 的长达到最大值 $\sqrt{2}$.

3. 由于 $2,2^2,2^3,2^4,2^5,2^6,\cdots$ 用 9 除所得的余数依次是 2,4,8,7,5,1,…,因此, 2^{m+6} 与 2^m 分别用 9 除所得的余数相等.

但 $2\,006=334\times6+2$,因此, a_1 用 9 除所得的余数为 4.于是, a_1 的各位数字之和用 9 除所得的余数为 4.

由于 a_2 与 4^2 分别用 9 除所得的余数相等,因此, a_2 用 9 除所得的余数为 7.

由于 a_3 与 7^2 分别用 9 除所得的余数相等,因此, a_3 用 9 除所得的余数为 4, a_3 的各位数字之和用 9 除所得的余数为 4.

另一方面, $a_1=2^{2\,006}<2^{3\times669}<10^{669}$;

a_1 的各位数字之和不超过 $9\times669=6\,021$,因此, $a_2\le6\,021^2<37\times10^6$;

a_2 的各位数字之和不超过 $9\times7+2=65$,因此, $a_3\le65^2=4\,225$;

a_3 的各位数字之和不超过 $9\times3+3=30$,因此, $a_4\le30^2$.

由于 a_4 等于 a_3 的各位数字之和的平方,因此, a_4 等于某个用 9 除所得的余数为 4 的数的平方.

又由于 $a_4\le30^2$,因此, a_4 是 4^2、13^2、22^2 三数之一,即 16、169、484 三数之一.

由于 a_5 是 49、256 两数之一,则有

$a_6=169$, $a_7=256$, $a_8=169$, $\cdots$.

依此类推可得 $a_{2006}=169$.

第 二 试

1. $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-2$.

由题意有

$3(4a^2-4a|b|+b^2)+(4b^2+4b|c|+c^2)+$

$4(c^2+4c+4)\leqslant 0$,

即 $3(2a-|b|)^2+(2b+|c|)^2+4(c+2)^2\leqslant 0$.

故 $\begin{cases}2a-|b|=0,\\2b+|c|=0,\\c+2=0.\end{cases}$

解得 $a=\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=-2$.

2. $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

由 $a>b>c$ 及 $a+b+c=0$,知 $a>0$, $c<0$. 则

$0=a+b+c<2a+c\Rightarrow -2a<c\Rightarrow\frac{c}{a}>-2$;

$0=a+b+c>a+2c\Rightarrow -\frac{a}{2}>c\Rightarrow\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$.

3. 达到最小值时, $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$;达到最大值时, $x=\pm 1$, 0.

注意到

$4-x^2-\sqrt{1-x^2}=3+(1-x^2)-\sqrt{1-x^2}$

$=\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$.

当 $\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$,即 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,代数式取最小值 $\frac{11}{4}$;当 $\sqrt{1-x^2}=0$ 或 1,即 $x=\pm 1$, 0 时,代数式取最大值 3.

4. 168.

由切线定理易知

$AB=$ 外公切线长 $=\sqrt{(112+63)^2-(112-63)^2}$

$=2\sqrt{112\times 63}=168$.

5. $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ 和 $(-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

易知 AC 的中点 $T(0,1+\sqrt{3})$.

将正方形 $ABCD$ 平移,使其中心 T 移到原点 O,则有 $A'(-1,-\sqrt{3})$, $C'(1,\sqrt{3})$.

将 A'、C' 以点 O 为中心旋转 $90°$,得到

$B'(\sqrt{3},-1)$, $D'(-\sqrt{3},1)$.

故 $B(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $D(-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

6. $m=17$, $n=13$.

由题意得 $6m+8n+15=mn$. 故

$(m-8)(n-6)=48+15=63$

$=1\times 63=3\times 21=7\times 9$.

又 n 是两位的质数,故 $n=13$, $m=17$.

7. $x_1=19$, $x_2=\frac{13+5\sqrt{2}}{7}$.

将方程两边平方并整理得

$7x^3-159x^2+511x-323=0$,

即 $(x-19)(7x^2-26x+17)=0$.

解得 $x_1=19$, $x_{2,3}=\frac{13\pm 5\sqrt{2}}{7}$.

由方程定义知, $x>11$ 或 $\frac{7}{3}\leqslant x\leqslant 3$ 或 $x<-6$.

故方程的解为 $x_1=19$, $x_2=\frac{13+5\sqrt{2}}{7}$.

8. $a=\sqrt{2}$.

由 $b<0$,知对称轴不是 $x=0$,故抛物线的图像必为后两个图像之一.

于是, $a^2+\sqrt{2}a-4=0$.

解得 $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=-2\sqrt{2}$.

易知后两个图像的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}>0$,得 $a>0$. 所以, $a=\sqrt{2}$.

9. 0.6.

如图 4,联结 PO 交 BC 于点 D. 由切线性质知

$PO\perp MN$.

又 $MN\parallel BC$,所以,

$PO\perp BC$.

故点 D 为 $\odot O$ 与 BC 的切点.

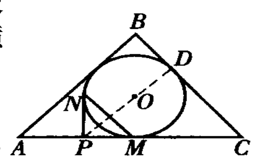

图 4

又 $CD=CM=3.5$, $PC=\frac{CD}{\cos C}=3.5\times\frac{10}{7}=5$,

故 $PN=PM=PC-CM=1.5$,

$MN=2PM\cos C=2\times 1.5\times\frac{7}{10}=2.1$.

所以, $MN-NP=0.6$.

10. 11, 3.1.

当使用 x 年后,该汽车的年平均费用为

$y=\frac{1}{x}\left\{12.1+x\times 1+\frac{x}{2}[0+0.2(x-1)]\right\}$

$=0.9+0.1x+\frac{12.1}{x}$

$\geqslant 0.9+2\sqrt{0.1\times 12.1}=3.1$.

当且仅当 $0.1x=\frac{12.1}{x}$,即 $x=11$(年)时,该汽车的最小年平均费用是 3.1 万元.

(夏兴国　陈传理　提供)