竞赛之窗

2005 我爱数学初中生夏令营数学竞赛

第 一 试

1. 已知

(1) $a>0$;

(2) 当 $-1\leq x\leq 1$ 时,满足

$|ax^2+bx+c|\leq 1$;

(3) 当 $-1\leq x\leq 1$ 时, $ax+b$ 有最大值 2.

求常数 a、b、c.

2. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 I 为内心, O 为外心, $AB=5$, $BC=6$, $CA=4$. 求证: $OI\perp CI$.

3. 在 9×9 的方格表中,共有 81 个小方格. 在每一个小方格中,写上一个数. 如果只要每行、每列至多有三个不同的数,就能保证在方格表中存在一个数,这个数在某一行中至少出现 n 次,在某一列中也至少出现 n 次,那么, n 的最大值是多少? 并证明你的结论.

第 二 试

1. 已知 $\dfrac{(2x+z)^2}{(x+y)(-2y+z)}=8$. 则 $2x+4y-z+6=$______.

2. 若 $2x^2+7xy-15y^2+ax+by+3$ 可以分解成两个一次整系数多项式的乘积,其中 a、b 为实数,那么, $a+b$ 的最小值是______.

3. 已知 n 是正整数, $1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}$ 是一个有理式 A 的平方. 那么, $A=$______.

4. 某计算机用户计划用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘. 根据需要软件至少买 3 片,磁盘至少买 2 盒. 则不同的选购方式共有______种.

5. 已知方程 $6x^2+2(m-13)x+12-m=0$ 恰有一个正整数解. 则整数 m 的值为______.

6. 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中,点 M、N、O、P 分别在边 AB、BC、CD、DA 上. 如果 $AM=BM$, $DP=3AP$,则 $MN+NO+OP$ 的最小值是______.

7. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, AD 为 BC 上的高, $\angle CAB=66°$, $\angle ABC=44°$. 那么, $\angle OAD=$______.

8. 代数式

$$\sqrt{9x^2+4}+\sqrt{9x^2-12xy+4y^2+1}+\sqrt{4y^2-16y+20}$$

达到最小值时, x、y 的值分别为______.

9. 如果 2 006 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2006}$ 满足下列条件:

$a_1=0$, $|a_2|=|a_1+2|$, $|a_3|=|a_2+2|$, $\cdots\cdots$, $|a_{2006}|=|a_{2005}+2|$,

---

故 $p=-2k$, $q=1$.

由命题中 (3) $\Leftrightarrow$ (1) 得

$a_{n+2}-2ka_{n+1}+a_n=0$. ①

结合 $a_0=0$, $a_1=1$,并应用数学归纳法知,数列 $\{a_n\}$ 的每一项都是整数.

由式①得 $2k\mid a_{n+2}\Leftrightarrow 2k\mid a_n$.

而 $2k\mid a_0$,应用数学归纳法可得

$2k\mid a_{2n}$, $n=0,1,\cdots$.

顺便指出,在解题时,可不直接应用命题中结论,而只要按命题的证明步骤进行推导即可.

那么, $a_1+a_2+\cdots+a_{2005}$的最小值是______.

10. 一栋房子的造价由地上部分费用与基础部分费用组成. 一栋面积为 N m^2 的房子的地上部分费用与 $N\sqrt{N}$成正比,基础部分费用与$\sqrt{N}$成正比. 已知一栋 3 600 m^2 的房子的造价中的地上部分费用是基础部分费用的 72 %. 那么,要建造若干栋相同的住房,使总面积为 80 000 m^2 的总造价最小,则每栋住房的面积的平方米数应是______.

参 考 答 案

第 一 试

1. 由(1)知 $y=ax^2+bx+c$ 为开口向上的抛物线,由(1)、(3)知

$$a+b=2. \qquad ①$$

由(2)知

$$|a+b+c|\leqslant 1, \qquad ②$$

$$|c|\leqslant 1. \qquad ③$$

由①、②知

$$|2+c|\leqslant 1. \qquad ④$$

由③、④得 $c=-1$.

故 $x=0$ 时, $y=ax^2+bx+c$ 达到最小值.

因此, $-\frac{b}{2a}=0$, $b=0$.

由①得 $a=2$. 故 $f(x)=2x^2-1$.

2. 如图 1,延长 CI 交AB于 F,联结 AI,有

$$\frac{BF}{AF}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, \qquad ①$$

$$BF+AF=5. \qquad ②$$

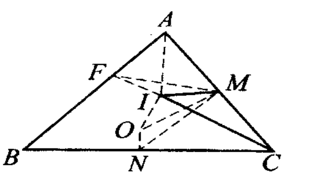

图1

由式①、②知

$AF=2$.

设 M 为边AC的中点,则 $AM=2$.

所以, $AM=AF$.

故 $\angle AFM=\angle AMF=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$,

$\angle MFC=\angle AFC-\angle AFM$

$=\left(180°-\angle BAC-\frac{1}{2}\angle ACB\right)-\left(90°-\frac{1}{2}\angle BAC\right)$

$=\frac{1}{2}\angle ABC$.

易知, $\angle IMF=\angle MFC$.

因此, $\angle MIC=\angle ABC$.

再设 N 为BC的中点,则

$\angle MNC=\angle ABC=\angle MIC$.

故点 M、I、N、C 在同一个圆上.

又因为点 M、O、N、C 在同一个圆上,所以,点 M、I、O、C 在同一个圆上.

因为 $OM\perp MC$,所以, $OI\perp CI$.

3. 如果将 9×9 的方格表分成 9 个 3×3 的方格表,在同一个 3×3 的方格表的每一个小方格中都写上相同的数,任意两个不同的 3×3 的方格表上的数都不同,那么,每行、每列恰有三个不同的数. 因此,所求的 n 的最大值不大于 3.

下面证明:只要每行、每列至多有三个不同的数,就能保证在方格表中存在一个数,这个数在某一行中至少出现 3 次,在某一列中也至少出现 3 次.

当某一行中某个数出现的次数不小于 3 时,就在这一行中这个数所在的小方格打上符号①. 由于每行至多有三个不同的数,则在同一行中至多有四个小方格没有打上符号①,至少有五个小方格打上了符号①. 因此,整个表中至少有 5×9 个小方格打上了符号①.

同样地,当某一列中某个数出现的次数不小于 3 时,就在这一列中这个数所在的小方格打上符号②.

同理,整个表中至少有 5×9 个小方格打上了符号②.

由于 $5\times9+5\times9>9\times9$,因此,至少有一个小方格既被打上了符号①,又被打上了符号②.

显然,在这一小方格中写的数,在这一小方格所在的行中至少出现 3 次,在这一小方格所在的列中也至少出现 3 次.

综上所述,所求的 n 的最大值为 3.

第 二 试

1. 提示: $(2x+4y-z)^2=0$, $2x+4y-z+6=6$.

2. 提示:若

原式 $=(x+5y)(2x-3y)+ax+by+3$,

则 $(a,b)=(-5,-12),(5,12),(-7,4),(7,-4)$.

故 $(a+b)_{\min}=-17$.

3. 提示:原式 $=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2$. 则

$$A=\pm\frac{n^2+n+1}{n^2+n}.$$

4. 先买3片软件和2盒磁盘,余下的180元若不买软件,则可再买磁盘0盒、1盒或2盒;若再买1片软件,则可再买磁盘0盒或1盒;若再买2片软件,则不可能再买磁盘;若再买3片软件,也不可能再买磁盘. 共有7种选购方式.

5. 由于 $\Delta=4(m-13)^2-24(12-m)$ 是一个完全平方数,因此,存在非负整数 y,使得

$$(m-13)^2-6(12-m)=y^2,$$

即 $(m-10-y)(m-10+y)=3$.

又因为 $m-10-y\leq m-10+y$,所以,

$$\begin{cases}m-10-y=1,\\ m-10+y=3\end{cases} \text{或} \begin{cases}m-10-y=-3,\\ m-10+y=-1.\end{cases}$$

解得 $m=12$ 或 $m=8$.

若 $m=12$,则原方程无正整数解,矛盾.

若 $m=8$,则由原方程解得 $x=1$ 或 $x=\frac{2}{3}$. 符合题意.

故所求的 $m=8$.

6. 如图2,有

$$MN+NO+OP$$
$$=MN+NO_1+O_1P_2$$
$$\geq MP_2,$$

且当点 N、O_1 都在线段 MP_2 上时,上式等号成立. 则

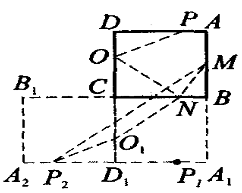

图2

$$MP_2=\sqrt{MA_1^2+A_1P_2^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{85}}{4}.$$

7. 如图3,有

$$\angle OAD=90°-\angle AEF$$
$$=90°-(\angle ABC+\angle CBF)=90°-\angle CAD-\angle ABC$$
$$=\angle ACB-\angle ABC=180°-2\angle ABC-\angle CAB=26°.$$

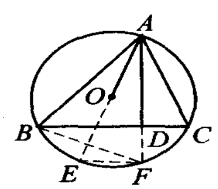

图3

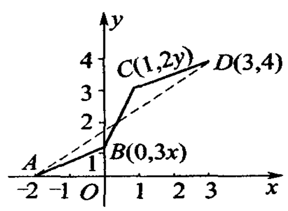

图4

8. 如图4,有

$$\text{原式}=\sqrt{[0-(-2)]^2+(3x-0)^2}+$$
$$\sqrt{(1-0)^2+(2y-3x)^2}+$$
$$\sqrt{(3-1)^2+(4-2y)^2}$$
$$=AB+BC+CD\geq AD,$$

其中 $A(-2,0)$、$B(0,3x)$、$C(1,2y)$、$D(3,4)$,并且当点 B、C 在线段 AD 上时,原式达到最小值.

当原式达到最小值时,有

$\frac{3x}{2}=\frac{4}{5}$,解得 $x=\frac{8}{15}$;

$\frac{2y}{3}=\frac{4}{5}$,解得 $y=\frac{6}{5}$.

9. $a_1^2=0$,

$$a_2^2=a_1^2+4a_1+4,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$a_{2\,006}^2=a_{2\,005}^2+4a_{2\,005}+4.$$

以上各式相加得

$$4(a_1+a_2+\cdots+a_{2\,005})+4\times2\,005=a_{2\,006}^2\geq0,$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{2\,005}\geq-2\,005.$$

由已知 $a_1,a_2,\cdots,a_{2\,005}$ 都是偶数,因此,

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2\,005}\geq-2\,004.$$

另一方面,当 $a_1=a_3=\cdots=a_{2\,005}=0$, $a_2=a_4=\cdots=a_{2\,004}=-2$ 时,符合已知条件,并且使上式等号成立.

故所求的最小值是 $-2\,004$.

10. 设每栋住房的面积的平方米数应是 y,共建造了 x 栋相同的住房,总造价为 S. 则

$$\begin{cases}xy=80\,000,\\ S=(\alpha y\sqrt{y}+\beta\sqrt{y})\cdot x,\\ \frac{\alpha\cdot3\,600\sqrt{3\,600}}{\beta\sqrt{3\,600}}=\frac{72}{100},\end{cases}$$

其中 α、β 为比例常数. 于是,有

$$S=\alpha\cdot80\,000\sqrt{\frac{80\,000}{x}}+5\,000\alpha\sqrt{\frac{80\,000}{x}}\cdot x$$
$$=5\,000\sqrt{80\,000}\,\alpha\left(\frac{16}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$$
$$\geq10^6\times\sqrt{2}\alpha\times2\sqrt{\frac{16}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}}$$
$$=10^6\times8\sqrt{2}\alpha.$$

由于上式等号成立,因此,$\frac{16}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$.

故 $x=16$, $y=5\,000$.

(夏兴国　提供)