全国高中数学竞赛的内容与方法

一. 数学竞赛的发展历程

中国数学竞赛活动的发展曲折，至今已经经历了两个时期，走过了三个阶段：第一阶段，从 1956 年至 1964 年，这是高中数学联赛的开始阶段；第二阶段，从 1978 年至 1985 年，是高中数学联赛的发展阶段；第三阶段，从 1985 年至今，是高中数学联赛成熟并取得辉煌的阶段.我们讲的高中数学联赛，主要是讲第三阶段.

经过几十年的艰苦摸索和实践检验，中国数学奥林匹克竞赛活动积累了成熟的经验，形成了一套适合我国国情、相对稳定而又不断丰富的做法，归纳如下：

1. 目的：

（1）提高学生的学习数学的兴趣，推动课外活动的发展；

（2）促进中学数学教学改革；

（3）发现和培养人才；

（4）为参加国际数学竞赛做准备.

2.原则

（1）民办公助；

（2）精简节约；

（3）自愿参加.

3.时间

每年 10 月份中旬的第一个星期天举行全国高中数学联赛，每年 4 月中旬的第一个星期天举行全国初中数学联赛.全国小学数学奥林匹克竞赛初赛、决赛分别在每年的 3 月、4 月举行.

4.主办

由各省、市、自治区数学会轮流举办.

年份	主办方
1981	北京
1982	上海
1983	安徽
1984	贵州
1985	天津

1986	四川
1987	河南
1988	江西
1989	湖南
1990	吉林
1991	江苏
1992	广东
1993	浙江
1994	湖北
1995	广西
1996	黑龙江
1997	湖南
1998	福建
1999	安徽
2000	辽宁
2001	江苏
2002	吉林
2003	陕西
2004	海南
2005	江西
2006	浙江
2007	天津
2008	重庆

5. 奖励

由中国数学会表彰各省、市、自治区参加联赛的前 150 名，发给统一的证书和奖章. 高中数学一等奖获得者可以保送到名牌、重点高校. 其中我们山东省每年一等奖获得者大约有 40 人. 如不愿被保送，在参加普通高等学校招生考试时，总分加 20 分.

6. 试题

试题由各省、市、自治区数学会提供，经东道省精选出所需题量的 2-3 倍，最后由全国

命题工作会议定稿.贯彻“大众化、普及型、不超纲、不超前”的原则.

7.冬令营

为选拔和培训我国的 IMO 队员，自 1986 年起，每年的元月由中国数学奥林匹克委员会举办一次参加全国中学生数学冬令营.营员来自各省的高中数学联赛第一名及其它联赛成绩优异者，计百人左右.虽然冬令营期间有参观、专家报告等活动，但核心是进行两天的模拟 IMO 考试，选拔出二三十名国家集训队队员.集训后 1 个月产生 6 名国家队队员.

全国中学生数学冬令营从 1991 年（第六届）起也叫做“中国数学奥林匹克”（简称 CMO）.

8.大纲与教材

为保证中国数学奥林匹克活动的健康发展，中国数学会于 1992 年制定了“高中数学竞赛大纲”和“初中数学竞赛大纲”，并出版了相应的数学奥林匹克基础教程.随着国际奥林匹克竞赛和国内基础教育的课程改革的推进，相应工作会议作出与时俱进行的调整，现将最近一次的调整内容列出，以方便大家学习：

高中数学竞赛大纲（2006 年修订试用稿）

中国数学会普及工作委员会制定

(2006 年 8 月第 14 次全国数学普及工作会议讨论通过)

从 1981 年中国数学会普及工作委员会举办全国高中数学联赛以来，在“普及的基础上不断提高”的方针指引下，全国数学竞赛活动方兴未艾，每年一次的竞赛活动吸引了广大青少年学生参加.1985 年我国又步入国际数学奥林匹克殿堂，加强了数学课外教育的国际交流，20 年来我国已跻身于国际数学奥林匹克强国之列.数学竞赛活动对于开发学生智力、开拓视野、促进教学改革、提高教学水平、发现和培养数学人才都有着积极的作用.这项活动也激励着广大青少年学习数学的兴趣，吸引他们去进行积极的探索，不断培养和提高他们的创造性思维能力.数学竞赛的教育功能显示出这项活动已成为中学数学教育的一个重要组成部分.

为了使全国数学竞赛活动持久、健康地发展，中国数学会普及工作委员会于 1994 年制定了《高中数学竞赛大纲》.这份大纲的制定对高中数学竞赛活动的开展起到了很好的指导作用，使我国高中数学竞赛活动日趋规范化和正规化.

近年来，课程改革的实践，在一定程度上改变了我国中学数学课程的体系、内容和要求.

同时，随着国内外数学竞赛活动的发展，对竞赛试题所涉及的知识、思想和方法等方面也有了一些新的要求. 为了使新的《高中数学竞赛大纲》能够更好地适应高中数学教育形势的发展和要求，经过广泛征求意见和多次讨论，中国数学会普及工作委员会组织了对《高中数学竞赛大纲》的修订.

本大纲是在教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》的精神和基础上制定的. 该教学大纲指出：“要促进每一个学生的发展，既要为所有的学生打好共同基础，也要注意发展学生的个性和特长；……在课内外教学中宜从学生的实际出发，兼顾学习有困难和学有余力的学生，通过多种途径和方法，满足他们的学习需求，发展他们的数学才能 .”

学生的数学学习活动应当是一个生动活泼、富有个性的过程，不应只限于接受、记忆、模仿和练习，还应倡导阅读自学、自主探索、动手实践、合作交流等学习数学的方式，这些方式有助于发挥学生学习的主动性. 教师要根据学生的不同基础、不同水平、不同兴趣和发展方向给予具体的指导. 教师应引导学生主动地从事数学活动，从而使学生形成自己对数学知识的理解和有效的学习策略. 教师应激发学生的学习积极性，向学生提供充分从事数学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识与技能、数学的思想和方法，获得广泛的数学活动经验. 对于学有余力并对数学有浓厚兴趣的学生，教师要为他们设置一些选学内容，提供足够的材料，指导他们阅读，发展他们的数学才能.

教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所列出的内容，是教学的要求，也是竞赛的基本要求. 在竞赛中对同样的知识内容，在理解程度、灵活运用能力以及方法与技巧掌握的熟练程度等方面有更高的要求. “课堂教学为主，课外活动为辅”也是应遵循的原则. 因此，本大纲所列的内容充分考虑到学生的实际情况，旨在使不同程度的学生都能在数学上得到相应的发展，同时注重贯彻”少而精”的原则.

全国高中数学联赛

全国高中数学联赛（一试）所涉及的知识范围不超出教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容，但在方法的要求上有所提高.

全国高中数学联赛加试

全国高中数学联赛加试（二试）与国际数学奥林匹克接轨，在知识方面有所扩展；适当增加一些教学大纲之外的内容，所增加的内容是：

1. 平面几何

几个重要定理：梅涅劳斯定理、塞瓦定理、托勒密定理、西姆松定理.

三角形中的几个特殊点:旁心、费马点，欧拉线.

几何不等式.

几何极值问题.

几何中的变换：对称、平移、旋转.

圆的幂和根轴.

面积方法，复数方法，向量方法，解析几何方法.

2. 代数

周期函数，带绝对值的函数.

三角公式，三角恒等式，三角方程，三角不等式，反三角函数.

递归，递归数列及其性质，一阶、二阶线性常系数递归数列的通项公式.

第二数学归纳法.

平均值不等式，柯西不等式，排序不等式，切比雪夫不等式，一元凸函数.

复数及其指数形式、三角形式，欧拉公式，棣莫弗定理，单位根.

多项式的除法定理、因式分解定理，多项式的相等，整系数多项式的有理根*，多项式的插值公式*.

n 次多项式根的个数，根与系数的关系，实系数多项式虚根成对定理.

函数迭代，简单的函数方程*

3. 初等数论

同余，欧几里得除法，裴蜀定理，完全剩余类，二次剩余，不定方程和方程组，高斯函数[x]，费马小定理，格点及其性质，无穷递降法，欧拉定理*，孙子定理*.

4. 组合问题

圆排列，有重复元素的排列与组合，组合恒等式.

组合计数，组合几何.

抽屉原理.

容斥原理.

极端原理.

图论问题.

集合的划分.

覆盖.

平面凸集、凸包及应用*.

注：有*号的内容加试中暂不考，但在冬令营中可能考.

二. 竞赛数学的内容与方法

数学竞赛的开展导致了竞赛数学的产生，竞赛开始的那些年头，其内容主要是中学数学教材中的代数方程、平面几何、三角函数等，经过40余年的发展，已形成一个源于中学又高于中学数学的新层面，其思想方法日渐与现代数学潮流合拍.通过对《竞赛大纲》研究和对1-46届高中数学的IMO试题与CMO试题统计研究可以看出，竞赛数学正相对稳定在几个重点内容上，总体来说，可以归纳为四大支柱、三大热点.

四大支柱：代数、几何、初等数论、组合初步（俗称代数题、几何题、算术题和智力题）；三大热点：组合几何、组合数论、集合分拆.我国的冬令营、CMO等试题与国际发展是完全一致的，高中竞赛试题的内容也以中学数学教材为依托逐渐与国际潮流接轨.

1. 代数

代数是中学数学的主体内容，其在竞赛中占据重要地位是理所当然的，已广泛涉及恒等变形、方程、函数、多项式、不等式、数列、复数、函数与方程、矩阵等方方面面，近些年来，试题的主要特点是：

（1）出现集中的趋势

从最近几年的高中联赛（二试），特别是对IMO及CMO的研究可以看出，近十几年以来，难度较小的问题（如恒等变形、单一的解方程等）消失了，明显超出中学范围的问题（如矩阵等）也消失了，代数问题正在向不等式、数列、函数与方程上集中.这表明，高中数学竞赛（二试）的命题趋向是，既在努力避开有求解程工的内容、提高试题难度，又在尽力地避免超出中学生知识范围，而在思维的灵活性、创造性上做文章.

（2）运算与论证的综合

中学代数偏重于运算，并且常常有程序化、机械化的优势（运算是机械化的推理）.作为高层次的竞赛，停留在运算熟练和准确上是不够的，因而IMO、CMO及高中数学联赛的代数题常以抽象论证题的面目出现，并且时间也允许进行大数字、多字母、多环节的硬运算.一方面精确的运算为推理提供论据，另一方面，论证推理又提出演算需要，两者相辅相成.从理解题意开始，到运算结构的分析、运算阶段的连接，乃至整个解题程序的调控，都有运算与论证的交互推进.这构成了IMO、CMO及高中联赛（二试）代数题的一个发展趋势，也体现着代数思维的一般性和从过程到对象（凝聚）等特征.

（3）与数论、组合、几何的交叉

代数知识在各个学科中都有基础作用，无论哪一门中学数学分支都少不了代数运算.IMO、CMO及高中数学联赛（二试）试题在避开常规代数题的同时，正在加强与各个学科的综合，不等式不仅有大量的数列不等式、最优化背景的不等式、而且越来越多的几何不等式、数论不等式、组合不等式；方程知识也在数论问题、几何问题或其他离散问题中屡屡出现.

2.几何

欧几里得几何中虽然古老，但在提供几何直觉和逻辑推理方面仍有其不可替代的教育价值，因而历来受到数学竞赛的青睐，平面几何问题已经成为属于IMO、CMO及高中数学联赛（二试）考题的必考题型.而在高中数学联赛二试的三道试题中，平面几何往往又是最为简单的一道试题，因而在所有参加高中数学联赛的同学都有一种体会“得几何者得天下”.

高中数学联赛中的平面几何试题可以分为三个层次:

第一层次，是与中学数学教材结合比较紧密的常规几何题，虽然也有轨迹与作图，但主要以全等法、相似法为基础的证明题，重点是与圆有关的命题，因为圆的命题知识容量大、变化余地大、综合性强，从而成为了编撰竞赛试题的最好的素材.

第二层次，是比中学数学要求稍高的内容，与共点性、共线性、几何不等式、几何极值等，这些问题的结构优美，解法灵活、常与几何名题相联系.

第三个层次，是组合几何.这是利用组合数学的成果来解决几何学中的问题，主要研究几何图形的拓扑性质和有限制条件的欧几里得性质.所牵涉的类型包括计数、分类、构造、覆盖、递推关系以及相邻、相交、包含等拓扑性质.这类问题在第6届IMO试题中就出现了，但近20年以来，无论内容、形式和难度都上了新的台阶，成为了一类极具竞赛意味、也极具挑战性的新颖题目.

对于参加高中数学联赛的同学来说，只要求能达到第二层次就足以应对，为此，我们将在以后的学习过程中，将历年以来涉及到的平面几何的重要定理、典型问题和基本方法加以论述.

3.初等数论

初等数论也叫整数论，其研究对象是自然数.由于其形式简单，意义明确，所用的知识不多而又富有技巧性，因而是历来都是各级竞赛的重点内容.

如果说代数、几何离中学数学教材还比较近的话，那么初等数论则在中学数学教材中还未作系统的介绍.而中学生（特别是优秀的中学生）又不是不能接受这样的一种思维发展区

中，其在培养数感和发现数学才华方面具有独特的功能，正在与组合数学相融合成为高中竞赛的一个新的热点题源.它还有一个优势是，能方便地提供从小学到大学的各层次竞赛试题，“奇偶分析法”也成了小学到大学都使用的数学奥林匹克技巧.

数学竞赛中的数论问题广泛地涉及奇数与偶数、约数与倍数（素数与合数）、平方数、整除、同余、不定方程、数论函数（高斯函数$[x]$）、数的进位制等内容.我们也将在以后的培训与辅导过程中对数论问题加以重点分析.

4.组合初步

数学竞赛中的组合数学不是一个十分严格的概念，它离中学数学教材最远，通常指中学代数、几何、算术（数论）之外的内容（俗称“杂题”）.对于中学生而言，这类问题最基本的特点是不需要专门的数学用语就可以表述明白，解决起来也没有固定的程式（非常规），往往需要精巧的构思.从内容上来看可以归结为两大类：给合计数问题和给合设计问题.

组合计数问题包括有限集合元素的计算、相应子集的计算、集合的分拆方法数的计算等，表现为数值计算、组合恒等式或组合不等式的证明.知识基础是分类加法原理与分步乘法计数原理和排列组合公式；常用的方法有：代数恒等变形、二项式定理、数学归纳法、递推、组合分拆、容斥原理等.

组合设计问题的基本含义是，对于有限集合A，按照性质P来作出安排，有时只是证胆具有性质P的安排是否存在、或者是验证作出的安排是否具有性质P（称为存在性问题，又可分为肯定型、否定型与探索型）；进一步，则需要把具体安排（或具体性质）找出来（或称构造性问题）；进一步同学要找出较好的安排（称为最优化问题）.

值得注意的一个新趋势是组合与几何、数论的结合，产生组合几何、组合数论，它们和集集合的拆分一起构成了竞赛数学中的“三大热点”，突出而又鲜明地体现出了数学竞赛“问题解决”的特征.这三个方面之所以成为热点，从思维方式、解题技巧上分析，是因为其更适宜数学尖子脱颖而出，且与现代数学思想相联系；从技术层面上分析，还由于这几个方面能方便地提供挑战中学生的新颖题目.

在我们的辅导过程中，我们将安排合适的时间对这内容详细地加以析.

5.数学奥林匹克的方法

竞赛数学不是一个有独立研究对象、独立研究方法的数学分支，而是由若干数学分支上的某些层面交叉综合而成的一种教育数学.这使得竞赛数学的方法既有一般性又有其特殊性.

数学竞赛首先是数学题，但又不是单靠记忆和模仿就能解决的常规“练习题”

（Exercise），而是具有接受性、障碍性、探索性的“问题”（Problem），需要在一般的思维规律指导下，综合而灵活地运用数学基础知识和数学基本方法才能解决，表现为一种创造性活动.这当中经常使用一些中学常见的方法：如探索法、构造性、反证法、数学归纳法、待定系数法、换元法、配方法等等.这体现了数学竞赛方法的一般性.

同时竞赛数学的层面性质和热点内容又积累了一批体现竞赛特征的奥林匹克技巧，如构造、对应、递推、区分、染色、配对、极端原理、对称性分析、包含与排除、特殊化、一般化、数字化、有序化、不变量、整体处理、变换还原、逐步调整、奇偶分析、优化假设、算两次、辅助图表等.由于这些方法在中学日常教学中用得较少，因而，与中学数学常见的方法相比又表现出竞赛方法的特殊性.

奥林匹克竞赛技巧是竞赛数学中一个生动而又活跃的组成部分，我们将在辅导过程中对竞赛数学中常见的特殊化方法加以探究，而中学常见的数学方法，请同学们在课堂学习的过程中掌握.

竞赛数学是一种活数学，它的基础性、综合性、教育性是不会变化的，但其挑战性与创造性却是与时俱进的.

三. 数学奥林匹克竞赛的特征

从上的分析可以看出，竞赛数学的内容与方法从根本上主要有四个基本特征：位于中间数学、邻接研究数学、展示艺术数学、构成教育数学.

（一）位于中间数学

（1）中学数学与大学数学之间

数学竞赛所涉及的核心内容，不能直接归为中学数学，因为它常有大学数学的背景，用到了大学数学的思想方法，而且有些内容中学教材并不直接讲授.同时竞赛数学又不能简单地并入大学数学，毕竟 IMO、CMO 及高中联赛的命题内容到微积分之前就停止了，其能力要求并不超出优秀中学生所能接受的能力范围，而且有些内容大学教材也不直接讲授，普通大学生参赛未必就占优势.这些情况表明，竞赛数学是高等数学的深刻思想与初等数学的精妙结合的“中间数学”，很多题目有着高等数学的背景，而其解法却是初等的.

（2）学校数学与研究数学之间

学校数学是指各类学校课程所讲授的教育数学，它为学生提供今后学习或工作所需要的数学基础知识和数学基本方法，这是数学的后方.研究数学是指数学专业工作才需要掌握的前沿知识，它与数学的新发现、新进展直接联系.竞赛数学就其内容而言比较接近学校数学，

就其思想方法和能力要求而言却又比较接近研究数学.因此，竞赛数学介于学校数学与研究数学之间.

（3）严肃数学与趣味数学之间

数学竞赛就其题目设置而言，既有非常抽象、非常专业化的试题，又有非常实际、非常生活化的题目，并且无论哪一类题目上，命题者都追求内容现代化、陈述趣味性、技巧独创性，这就使得竞赛把抽象理论与实际内容结合了起来，把形式化与生活趣味化结合了起来，有时被人们称为“非常规题”.

例 1.（2008 年全国高中数学联赛一试）若三个棱长均为整数（单位：cm）的正方体的表面积之和为 564 cm^2，则这三个正方体的体积之和为（　　）

A. 764 cm^3 或 586 cm^3　　B. 764 cm^3

C. 586 cm^3 或 564 cm^3　　D. 586 cm^3

例 2.（2008 年河北省预赛）把 2008 表示成两个整数的平方差形式，则不同的表示方法有（　　）种.

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 16

例 3.（2008 年浙江省预赛）将 3k（k 为正整数）个石子分成五堆.如果通过每次从其中 3 堆中各取走一个石子，而最后取完，则称这样的分法是“和谐的”.试给出和谐分法的充分必要条件，并加以证明.

这些题目的命题与求解虽然较为简单，但却都存在深刻的数学思想.数学命题者将一些较为困难的问题进行了通俗化、生活化，通过身边的数学实例以激发学习者的兴趣.

（二）邻接研究数学

在这里，上面的中间性论证中已经谈到了，下面从三个方面展开：

（1）内容的新颖性

数学竞赛题不仅常常使用现代化的数学语言，体现现代数学的发展趋势，甚至有些内容就是科学研究的新成果.许多高层次、新情境的竞赛题都出自前沿数学家之手，或者是最新成果、或者是科研副成品.前沿数学家在自己的研究中遇到一些中间子问题，最终能用初等方法来解决，于是就化为不可多得的好试题；另外，一些高等数学成果经过简单化、特殊化后可以找到初等解法，更是竞赛试题的重要来源.

我们不妨可以认为，数学竞赛是由数学专家提出一个个课题，让青少年朋友研究解答.这种解答与做常规练习（被理想化与舞台化了）有一定的距离，而更能接近数学研究的本身.

（2）方法的创造性

数学竞赛题代表了活的数学.解答竞赛题虽然虽然离不开一般思维规律，离不开数学知识，也有一些使用频率较大的方法和技巧，但大都没有常规模式可套，变没有万能范本可循，且赛题内容不断更新，重要的是整体全局上洞察力、敏悦的直觉和独特的构思.

解数学竞赛题方法上的创造性包括命题者（数学家）与解答者（学生及教师）的创造性.前者体现在试题与答案上，后者体现在临场答卷中，而更多、更广泛的创造工作则来自群众性的赛后评议与永不间断、永无休止的研究中.

例 4.（2008 年全国高中联赛）设 $A=[-2,4)$， $B=\{x\,|\,x^2-ax-4\le 0\}$，若 $B\subseteq A$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $[-1,2)$　　B. $[-1,2]$　　C. $[0,3]$　　D. $[0,3)$

（3）问题的研究性

数学竞赛的许多试题由于它的新颖性、启示性、方向性，往往能为初等数学研究提供新的课题；另一些时候，又由于竞赛的权威性而使古老的问题焕发出新鲜的风采.有人说“一道题目就开辟了一个研究方向”，这并不是艺术的夸张.

例 5.（2008 年全国数学联赛）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(0)=2008$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，满足 $f(x+2)-f(x)\le 3\cdot 2^x$， $f(x+6)-f(x)\ge 63\cdot 2^x$，则 $f(2008)=$______________.

这道试题是在由中国于 1986 年首次向国际奥委会提供试题后的又一道研究周期函数的问题.邻接研究数学特征，突出体现了竞赛数学是一种发展中的活数学.

（三）展示艺术数学

竞赛数学把现代化的内容与趣味性的陈述、独创性的技巧结合起来，充分展示了数学的统一美、对称美与奇异美.有的问题所涉及到的知识并不多，一个证明的过程几乎全都是艺术的构造或构造的艺术.

（1）　构题的趣味性

竞赛试题的艺术魅力，首先来源于其深刻的背景，正是由于数学内容的本质揭示，才能比较充分地表现数学的真与美的统一，充满美感的简单性、对称性与奇异性才能更多的机会释放出来.人们都承认，数学是思维的体操，那么竞赛数学就是思维的“艺术体操”.正是由于几何、数论、组合更便于展示这种艺术，所以就更多地被吸收到竞赛数学中来.

竞赛试题的趣味性，实质上是人们对数学美的追求.人们不满足于内容上的科学、正确与内在美（这常常只有数学家自己才能欣赏），在构题形式上，也刻意求新、着意求异、力图表现得生动、有趣和充满感情.为此，各国命题者都不约而同地使用了很多技巧，如引进年号、帖近生活、拟人拟物、运用对比、巧设循环等等.

（2）解法的技巧性

一道国际水平竞赛题，如果它的解法不能体现数学的美、缺乏简洁、奇异与独创，那么在挑剔的主试委员会上是很验证通过的.在这种国际潮流的影响下，同时也由于数学竞赛的智力竞赛的性质，各个国家的试题都注意在题目的趣味性和技巧性上严格把关.因而（如上所说），整个竞赛数学充满眼花缭乱的奥林匹克技巧，令人目不暇接.更需要强调的是，竞赛的技巧不是低层次的一招一式或妙手偶得的雕虫小技，它既是使用数学技巧的技巧，又是创造数学技巧的技巧，更确切一点说，这是一种数学创造力，一种高思维的层次、高智力的艺术，一种独立于史诗、音乐、绘画之外的数学美.

例 6. 某班有 49 位学生，坐成 7 行 7 列，每个座位的前、后、左、右的座位叫做它的“邻座”.要让这 49 位同学都换到他（她）的邻座上去，问这种调换位置的方案能不能实现?

讲解：表面上看，大多数同学都有 4 种选择，至少也有 2 种至 3 种选择，机会很多，换位是有希望的.但事实上却是不可能的，下面分三步说明:

第一步：给这 49 位同学编上号，则每一个人的调换位置都是奇号位与偶号位的互换;

第二步：如果这种调换位置是可能的，就应是奇号位与偶号位一样多，从而位置的总数为偶数;

第三步：但 49 是一个奇数，奇数$\neq$偶数，因而这种调换是不可能的.

这道习题如果给小学生讲解都能听明白，但所体现的解题艺术却是十分高超的.分析如下:

1.第一步所做的是对于一个实际问题进行数学化设计，这种设计的实质是构造两个集合，一个由奇数组成，一个由偶数组成:

$$A=\{1,3,5,\cdots,49\};$$
$$B=\{2,4,6,\cdots,48\}$$

这里既有构造又有分类，而这又是高中数学竞赛中常用的方法.

2.第二步体现了两个重要的方法：第 1 个是反证法：假设方案可以实现，则引出矛盾;

第 2 个是构造与对应：换位成了在集合 A 与集合 B 之间建立对应，使集合 A 中的每一个元素在集合 B 中都有象，且 A 中不同的元素在 B 中有不同的象（$Card(A)\le Card(B)$）；同样，B 中的每一个元素在 A 中都有象，且 B 中不同的元素在 A 上也有不同的象（$Card(B)\le Card(A)$）.这样就要求两个有限集合的元素个数相等（$Card(A)=Card(B)$）.

就在这一瞬间，抽象的集合、深奥的对应被简单化、通俗化、生活化、趣味化为“调整位置”（或把人数平均分成相等的两部分），这体现了一种美：大学思想+小学的知识.

3.第三步告诉我们，构成矛盾不依赖于 A、B 的具体数值，而仅仅用到元素的总数为奇数的特征，由此可以得到两点结论：①49 个座位的编号可以用 0,1 相间或黑白染色来代替；

②7 行 7 列得 49 个座位可用 $2m-1$ 行、$2n-1$ 列（$m,n\in N^*$）个座位来代替.

此题的求解结构是：

$$\underbrace{\text{数学化设计}+\overbrace{\text{集合与对应}+\text{“奇数}\neq\text{偶数”}\Rightarrow\text{不可能}}^{\text{反证法}}}_{\text{构造法}}$$

（四）构成教育数学

教育数学是为了数学教育的需要，对数学成果进行再创造.欧几里得的《几何原本》、柯西的《分析教程》、布尔巴基的《数学原理》等都属于教育数学.竞赛数学也是一种教育数学.目前，中国的“奥林匹克学派”正从三个方向进行这一层面的数学建设工作，并向体系化推进-----在中国的大地上已经出现了数学竞赛论或竞赛数学论的曙光.

其一，前沿成果的初等化，包括特殊化、具体化与生活趣味化；

其二，初等名题的新发掘，包括变形、组合、移植、引申与创新等；

其三，初等数学的纵深研究.

这是要从平凡而熟知的东西中变出新鲜的花样来，中科院院士张景中说：“进行这种再创造，无疑是向前辈的大师挑战”.

四. 竞赛数学的解题方略与学习策略

数学题（简称题）是指数学上要求回答或解释的题目上，需要研究或解决的矛盾.数学家把结论未知的题目才称为题，如“哥德巴赫猜想”，而一旦解决了就称为“定理”（或公式），这就更多地体现了“需要解决或研究的矛盾”，更多地体现了问题的本质是现有水平与客观需要的矛盾.

在数学中，我们常常把结论已知的题目也称为题.因为对学生而言，与数学家所面临的问题情景是相似的、性质是相同的.数学中的题又可以粗略地分为两类：一类是练习题（Exercise），学生通过对教材的模仿和操作练习，基本上就能够完成，具有接受性、封闭性和确定性的特征.另一类是问题（Problem），这是指一个对人具有智力挑战特征的、没有现成的直接方法、程序或算法的未解决的情境.它需要人们综合地、创造性地运用各种数学知识才能解决，具有接受性、障碍性和探索性的特征.

数学竞赛题从总体上属于“数学”问题（被“练习题”的世俗观点看成“难题”、“非常规题”），解数学竞赛题的过程是“问题解决”的过程，是像数学家那样做数学，是进行“数

学地思维”.如果说数学家解题是一个创造与发现的过程的话，那么学生（也包括部分教师）解竞赛题就是一个再创造与再发现的过程.

（一）解数学竞赛题的过程与方略

前面我们讲过，“练习题”可以通过记忆和模仿来解决，可以通过“题型+方法”来训练并提高成绩.但解竞赛题是一种创造性活动，不可能有固定的万能模式，下面所提供的也仅仅是一些在解竞赛题的过程中经常用的一些原则性建议和学可成功的经验:

（1）数学解题的四个阶段

波利亚在《怎样解题》(1945年）一书中提出了一个风靡世界的“怎样解题表”，将数学解题按照正常人解决问题时的自然过程分成了四个阶段:

① 弄清问题.主要弄清条件是什么？结论是什么？思考如何建立条件与结论之间的逻辑联系.这是一个认识自己所面临的问题，并对问题进行表征的过程.

② 拟定计划.这是一个探索解题思路的发现过程，波利亚的建议是分两步走：第一步，努力在已知与未知之间找出直接联系（模式识别等）；第二步，如果找不出直接联系，就对原来的问题作出某些必要性的变更或修改，引进辅助问题，为此，又进一步建议：看着未知数、回到定义，重新表述问题、考虑相关问题、分解或重新组合、特殊化、一般化、类比等，积极诱发念头，努力变化问题.这实际上是阐述和应用解题策略，并进行资源的提取和分配，基础是“过去的经验和已有的知识”，思维上是形象思维、逻辑思维、直觉思维的共同作用.这一步是波利亚解题表的核心内容.

③ 实现计划.把看清楚、想明白的思路按照严格的逻辑规则写下来.这当中可能会有某一步骤因忽视关键细节而反复，也可能会因为认真整理思想而深化理解或触发新的灵感.

④ 回顾.这包含着常规解题步骤的“检验”，更包含着把“问题及解法”作为对象的自觉反思.这一步要求我们全面地、有分析地领会所得的解法，并作为解题工作的必要环节而确定下来.

数学上存在证明的方法与发现的方法，波利亚在这里主要谈的是发现的方法（称为启发法或探索法)，其怎样解题的基本思想可以归结为“知识+启发法”，这也应该是解数学竞赛题的基本思想.

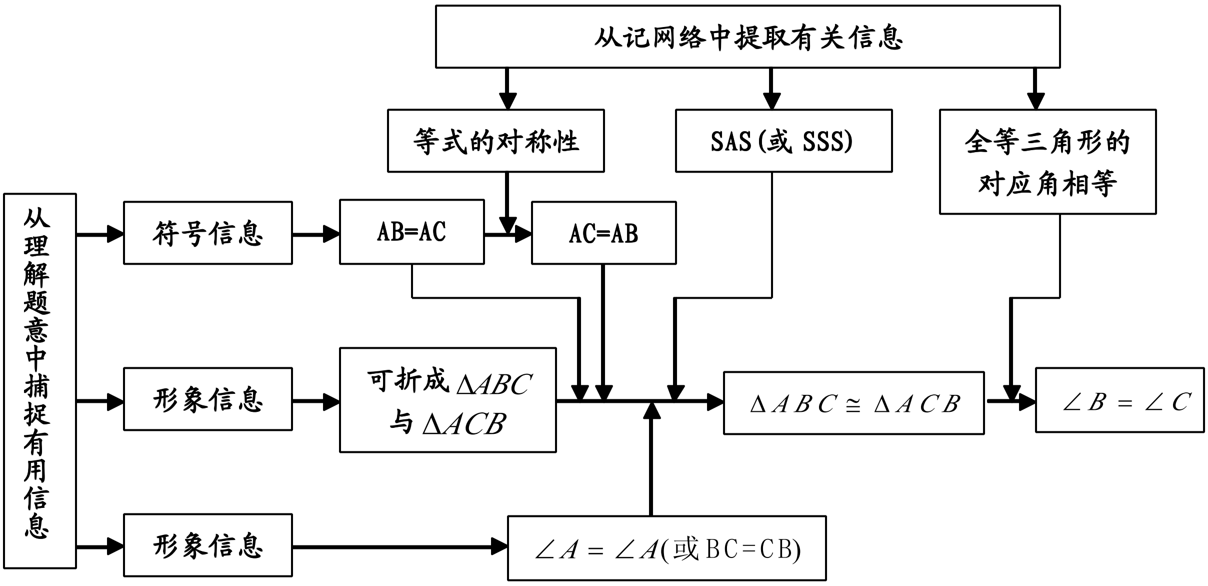
（2）数学解题的信息过程

从信息论的观点来看，数学解题应该是一个“三位一体”的工作:

①有用捕捉.即通过观察、从理解题意中捕捉有用的信息，主要是弄清条件和结论，分别有哪些以及考虑如何建立条件与结论（已知与未知）之间的逻辑关系等.而知识经验是有有用捕捉的基础，因此在平时的学习过程中，应注意对知识经验的积累.

②有关提取.即在“有用捕捉”的刺激下，通过联想从记忆网络中提取有关信息，主要提取解题依据和解题方法.良好的认识结构和机智的策略选择是连续提取、不断捕捉的基础.

③有效组合.将上这两组信息资源加工配置成一个和谐的逻辑结构.逻辑思维能力是有效组合的基础，能说服自己、说服朋友、说服“敌人”是基本目标.比如在证明等腰三角形的两个底角相等.其信息过程如下图：



这个过程的心理表征是：将等腰ΔABC拿起来，作一个空中的翻转，使AB与AC重合、AC与AB重合、$\angle A$与$\angle A$重合（或BC与CB重合），亦即翻转三角形（ΔABC）与其原来的位置（ΔABC）重合（$\Delta ABC \cong \Delta ACB$），从而使$\angle B$与$\angle C$重合（$\angle B=\angle C$）.在这风景点，三角形重合正是三角形全等的定义，角的重合正是角相等的定义.

（3）数学证明的心理机制

回忆我们的解题过程可以看到，数学证明的心理机制是这样一个“激活---扩散”的递扩过程：在问题有条件及结论的启引下，激活记忆网络中的一些知识点，然后沿接线向外扩散，依次激活新的有关知识.同时，要对被激活的知识进行筛选、组织、评价、再认识和转换，使之协调起来，直到条件与结论之间的线索接触，建立起逻辑演绎关系.

可见，良好的知识网络、灵活的信息转换和恰当的策略调控是不断激活、连续扩散的基础.

（二）竞赛数学解题的学习策略

在竞赛数学的学习过程中，往往是学习如何进行有效地解题. 这里，我们认为，经常要历经四个阶段:

（1）简单模仿

即模仿教师或教科书的示范去解决一些知识性的问题. 这是一个通常被模仿者的行为，获得相应的表象，从而产生类似的过程. 这里已有体验性的初步理解了.

（2）变式练习

即在简单模仿的基础上迈出主动实践的一步. 主要表现为做数量足够、形式变化的习题，本质上是进行操作性活动与初步应用. 其作用首先是通过变换方式和添加次数而增强效果、巩固记忆、熟练技能（使之达到自动化反应的程度）; 其次是通过必要的实践来积累理解所需要的操作数量、活动强度和经验体会.

学习数学不能单靠模仿和练习，但缺少这两步又是不行的. 没有亲身的体验、没有足够的过程、没有过硬的“三基”，数学理解就会被架空了. 模仿和变式练习应是学生获得本质领悟的基础和必要环节（“熟能生巧”可以找到心理学解释）. 而对求竞赛题来说，更重要的是跨越这两步而产生理解.

例 7. 计算: (1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$;

(2) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

（3）自发领悟

即在模仿与练习的基础上产生理解. 指当事人在解题实践中领悟到知识的深层结构，表现为豁然开朗、恍然大悟，但这种领悟往往是直觉的，“只可意会、不可言传”. 因而，这是一个潜意识与显意识的交错，由“三基”升华为能力的过程，也是各人自己体会“解题思路的探求”、“解题能力的提高”、“解题策略的形成”，从而获得能力的自身性增长与实质性提高的过程. 在这一阶段中会存在高原现象.

（4）自觉分析

这是一个理解从自发到自觉、从被动到主动、从感性到理性、从内隐到外显的飞跃阶段，表现为解题思路的主动设计、知识资源的理性配置、解题策略的自觉调控. 尽快进入这一阶段的一个基本途径是对解题过程自觉分析，弄清解题的基础知识、逻辑结构、信息流程，弄清解题过程中用到哪些知识、哪些方法，这些知识和方法又是怎样组成一个和谐的逻辑结构的. 这是一个通过已知学未知、通过分析“怎样解题”而领悟“怎样学会解题”的过程.

例 8.（2005 年全国高考题） ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上高的交点 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 $m=$ ________.

以上关于怎样解题和怎样学会解题的建议，需要通过具体解题实践来亲自体验和获得理解.

五. 我校在数学奥林匹克竞赛中取得的成绩

我校的奥林匹克数学竞赛辅导工作开展得比较晚，辅导教师的组成也较为年轻.2006 年的夏天,济宁一中数学奥林匹克竞赛辅导小组成立,辅导员也仅有贾广素与颜景海两位老师.经过长时间的摸索，在辅导期间也积累了较为丰富的经验.辅导员队伍也在不断的调整与变化，现在的辅导工作由贾广素与王子峰两位老师负责.2006 年 10 月，我校共派出 14 名同学参加全国数学奥林匹克竞赛，其中李昊同学（现就学于山东大学数学系）荣获全国二等奖，张长城（现就学于南京大学）与刘悦（现就学于中国海洋大学）获全国三等奖，其余的 11 名同学全部获得山东省一等奖.2007 年 10 月,我校共派出 15 名同学参加全国奥林匹克竞赛，其中岳爱珍同学获全国二等奖（现就读于西安交通大学），4 名同学获全国三等奖，其余 10 名同学全部获山东省一等奖.获得全国奖项的同学，均取得了高校自主招生的资格.这将是他们的人生之中的巨大的财富.

习题 1

（如果不加说明，A 组习题难度在一试水平，B 组习题为二试水平！本期由于刚刚接触奥林匹克竞赛，所选习题均较为简单，希望能独立完成！）

（A 组）

1.设 a、b、c 为实数，$4a-2b+c>0, a+b+c<0$，则下列四个结论中正确的是（　　）

（A）$b^2\le ac$（B）$b^2>ac$（C）$b^2>ac$且 $a>0$（D）$b^2>ac$且 $a<0$

2.在△ABC 中，若 $\angle A=45^0, AB=2, BC=a$，则 $a=\sqrt{2}$ 是△ABC 只有一解的　　　（　　）

（A）充分不必要条件（B）必要不充分条件（C）充要条件（D）既不充分又不必要条件

3. 已知向量 $\vec{a}=(m,\cos 2x+2\sin x-1), \vec{b}=(3-\cos 2x+4\sin x,-1)$，定义函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$.若对任意的 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，不等式 $f(x)>0$ 恒成立，则 m 的取值范围是（　　）

（A）$(\frac{1}{8},+\infty)$（B）$[0,\frac{1}{8})$（C）$(\frac{1}{8},2)$（D）$(2,+\infty)$

4.设 E、F、G 分别是正四面体 ABCD 的棱 AB、BC、CD 的中点，则二面角 C—FG—E 的大小是（　　）

（A）$\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{3}$（B）$\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（C）$\dfrac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2}$（D）$\pi-arc\cot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5.把数列$\{2n+1\}$依次按一项、二项、三项、四项循环分为（3),（5，7),（9，11，13),（15，17，19，21),（23),（25，27,),（29，31，33),（35，37，39，41)，…，在第100个括号内各数之和为　（　　）

（A）1992　（B）1990　（C）1873　（D）1891

6.设$x_i\in\{1,2,\cdots,n\}, i=1,2,\cdots,n$，满足$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n=n!$，使$x_1$，$x_2$，…，$x_n$一定是$1,2,\cdots,n$的一个排列的最大数$n$是　（　　）

（A）4　（B）6　（C）8　（D）9

7. $\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}}}$的值为______________。

8. 已知$t>0$,关于x的方程$|x|+\sqrt{t-x^2}=\sqrt{2}$,则这个方程有相异实根的个数情况是___.

9. 若实数x、y满足条件$x^2-y^2=1$，则$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2y}{x}$的取值范围是-------------------.

10.（2007年江西省预赛） 数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且对每个$n\in N^*$，a_n,a_{n+1}是方程$x^2+3nx+b_n=0$的两根，则$\sum\limits_{k=1}^{20}b_k=$______.

11. 设$A=\{x|x^2+4x=0\}, B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,若$B\subseteq A$，则实数$a$的取值范围是__________________。

12. （2008年河北省预赛）从m个男生，n个女生（$10\geq m>n\geq 4$）中任选2个人当组长，假设事件A表示选出的2个人性别相同，事件B表示选出的2个人性别不同. 如果A的概率和B的概率相等，则（m，n）的可能值为____________________.

13. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}\cdot a_n=n+1$（$n\in N^*$），求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}\geq 2(\sqrt{n+1}-1)$.

14. 已知等腰梯形PDCB中（如图1），PB=3，DC=1，PD=BC=$\sqrt{2}$，A为PB边上一点，且PA=1，将△PAD沿AD折起，使面PAD⊥面ABCD（如图2）。

（Ⅰ）证明：平面PAD⊥PCD;

（Ⅱ）试在棱PB上确定一点M，使截面AMC把几何体分成的两部分$V_{PDCMA}:V_{MACB}=2:1$;

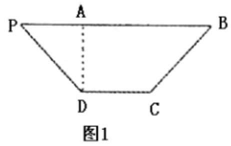


图1

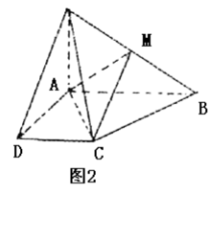


图2

（Ⅲ）在M满足（Ⅱ）的情况下，判断直线AM是否平行面PCD.

15. 设函数$f(x)=\sqrt[3]{1+x}-\lambda x$，其中$\lambda>0$.

（1）求λ的取值范围，使得函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是单调递减函数;

（2）此单调性能否扩展到整个定义域$(-\infty,+\infty)$上?

（3）求解不等式$2x-\sqrt[3]{1+x}<12$.

（B组）

1. （2008年江西省预赛）AD是直角三角形ABC斜边BC上的高，（$AB<AC$），I_1,I_2分别是$\Delta ABD,\Delta ACD$的内心，ΔAI_1I_2的外接圆$\odot O$分别交AB,AC于E,F，直线EF,BC交于点M;

证明：I_1,I_2分别是ΔODM的内心与旁心.

2. 一个数被3除余1，被4除余2，被5除余4，这个数最小是几?

3.（2007年第三届北方数学邀请赛）设ΔABC三边长分别为a,b,c，且$a+b+c=3$.
求$f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc$的最小值.

参考答案

例1.解： 设这三个正方体的棱长分别为a,b,c，则有$6\left(a^2+b^2+c^2\right)=564$，$a^2+b^2+c^2=94$，不妨设$1\le a\le b\le c<10$，从而$3c^2\ge a^2+b^2+c^2=94$，$c^2>31$．故$6\le c<10$．$c$只能取9，8，7，6.

若$c=9$，则$a^2+b^2=94-9^2=13$，易知$a=2$，$b=3$，得一组解$(a,b,c)=(2,3,9)$.

若$c=8$，则$a^2+b^2=94-64=30$，$b\le 5$．但$2b^2\ge 30$，$b\ge 4$，从而$b=4$或5．若$b=5$，则$a^2=5$无解，若$b=4$，则$a^2=14$无解．此时无解.

若$c=7$，则$a^2+b^2=94-49=45$，有唯一解$a=3$，$b=6$.

若$c=6$，则$a^2+b^2=94-36=58$，此时$2b^2\ge a^2+b^2=58$，$b^2\ge 29$．故$b\ge 6$，但$b\le c=6$，故$b=6$，此时$a^2=58-36=22$无解.

综上，共有两组解$\begin{cases}a=2,\\b=3,\\c=9\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\b=6,\\c=7.\end{cases}$

体积为$V_1=2^3+3^3+9^3=764$ cm^{3}或$V_2=3^3+6^3+7^3=586$ cm^3.

例 2. 解: 设 $x^2-y^2=2008$，即 $(x+y)(x-y)=2008$．2008 有 8 个正因数，分别为 1，2，4，8，251，502，1004，2008. 而且 $(x+y)$ 与 $(x-y)$ 只能同为偶数，因此对应的方程组为

$$\begin{cases} x+y= & -2 & -4 & -502 & -1004 & 2 & 4 & 502 & 1004 \\ x-y= & -1004 & -502 & -4 & -2 & 1004 & 502 & 4 & 2 \end{cases}$$

故 (x,y) 共有 8 组不同的值： $(503,501),(-503,-501),(-503,501),(503,-501)$；$(253,249),(-253,-249),(-253,249),(253,-249)$.

例 3. 解: 分法是和谐的 充分必要条件 是 最多一堆石子的个数不超过 k.

下面设五堆石子的个数分别为 a, b, c, d, e（其中 $a\geq b\geq c\geq d\geq e$）.

“必要性”的证明： 若分法是和谐的，则把 a 所对应的石子取完至少要取 a 次，这 a 次每次都要取走 3 个石子. 如果 $a>k$，则 $3a>3k$，即把 a 所对应的一堆取完时，需取走的石子多于五堆石子的总数. 矛盾！因此最多一堆石子的个数不能超过 k.

“充分性”的证明:（数学归纳法）

(1) 当 $k=1$ 时，满足“$a\leq k$” 的分法只能是 1，1，1，0，0. 显然这样的分法是和谐的.

(2) 假设 $k\leq n$ 时，满足“$a\leq k$” 的分法是和谐的.

(3) 当 $k=n+1$ 时，若 $a\leq n+1$，且分法 a, b, c, d, e 是不和谐的，则分法 $a-1, b-1, c-1, d, e$ 也是不和谐的. 由（2）及必要性的证明，可知 $\max\{a-1, b-1, c-1, d, e\}>n$.

因为 $a\geq b\geq c\geq d\geq e$，所以 $\max\{a-1, b-1, c-1, d, e\}=\max\{a-1, d\}>n$.

若 $a-1\geq d$，则有 $a-1>n$. 这与 $a\leq n+1$ 矛盾.

若 $a-1<d$，则有 $n<d\leq c\leq b\leq a\leq n+1$，从而有 $a=b=c=d=n+1$，于是有 $3(n+1)=a+b+c+d+e=4(n+1)+e$，这是不可能的. 矛盾.

因此当 $a\leq n+1$ 时，分法 a, b, c, d, e 是和谐的.

例 4. 解法一:（答案）因 $x^2-ax-4=0$ 有两个实根，$x_1=\dfrac{a}{2}-\sqrt{4+\dfrac{a^2}{4}}$，$x_2=\dfrac{a}{2}+\sqrt{4+\dfrac{a^2}{4}}$，

故 $B\subseteq A$ 等价于 $x_1\geq -2$ 且 $x_2<4$，即 $\dfrac{a}{2}-\sqrt{4+\dfrac{a^2}{4}}\geq -2$ 且 $\dfrac{a}{2}+\sqrt{4+\dfrac{a^2}{4}}<4$，

解之得 $0\leq a<3$.

解法二：（研究）因 $x^2-ax-4=0$ 有两个实根，不妨设为 $x_1<x_2$，考察二次函数 $y=x^2-ax-4$ 的图象，x_1,x_2 为二次函数 $y=x^2-ax-4$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，因为

$B\subseteq A$，从而 $x_1\ge -2$ 且 $x_2<4$，观察图象可以看出 $\begin{cases} f(-2)\ge 0 \\ f(4)<0 \end{cases}$，解之得：$0\le a<3$．

例 5. 解法一：由题设条件知

$$f(x+2)-f(x)=-(f(x+4)-f(x+2))-(f(x+6)-f(x+4))+(f(x+6)-f(x))$$
$$\ge -3\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+4}+63\cdot 2^{x}=3\cdot 2^{x},$$

因此有 $f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^{x}$，故

$$\begin{aligned} f(2008) &= f(2008)-f(2006)+f(2006)-f(2004)+\cdots+f(2)-f(0)+f(0) \\ &= 3\cdot(2^{2006}+2^{2004}+\cdots+2^{2}+1)+f(0) \\ &= 3\cdot\frac{4^{1003+1}-1}{4-1}+f(0) \\ &= 2^{2008}+2007. \end{aligned}$$

[解法二] 令 $g(x)=f(x)-2^{x}$，则

$$g(x+2)-g(x)=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^{x}\le 3\cdot 2^{x}-3\cdot 2^{x}=0,$$
$$g(x+6)-g(x)=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^{x}\ge 63\cdot 2^{x}-63\cdot 2^{x}=0,$$

即 $g(x+2)\le g(x), g(x+6)\ge g(x)$，

故 $g(x)\le g(x+6)\le g(x+4)\le g(x+2)\le g(x)$，

得 $g(x)$ 是周期为 2 的周期函数，

所以 $f(2008)=g(2008)+2^{2008}=g(0)+2^{2008}=2^{2008}+2007$．

例 7. 解：(1) 解法一：原式 $=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}.$

解法二：令 $x=\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$（$x>0$），两边平方，得

$x^2=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})+2\sqrt{5^2-(2\sqrt{6})^2}=12,$

故 $x=2\sqrt{3}(x>0)$，即 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}=2\sqrt{3}.$

(2) 令 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$，两边立方，得

$x^3=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}+3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\cdot(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})$

即 $x^3=4-3x$，即 $x^3-2x+4=(x-1)(x^2+x+4)=0$

解得 $x=1$（$\because x^2+x+4=0$ 中 $\Delta<0$，无解）

所以 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$．

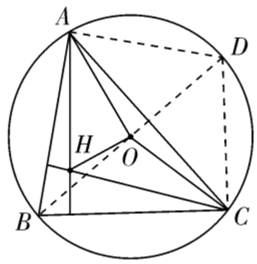
例 8. **【解法一】** 由已知，有向量等式 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，将其中的向量分解，向已知等式形式靠拢，有：$(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ ①

将已知 $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ 代入①式，得

$[m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})-\overrightarrow{OA}]\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ 即 $m(\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2)+(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

由于 O 是 ΔABC 的外心，得 $(m-1)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，且 ΔABC 是任意的三角形，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$ 不恒为 0，故只有 $m=1$.

【解法二】 若△ABC 的垂心为 H，外心为 O，如图.



连 BO 并延长交外接圆于 D，连结 AD，CD.

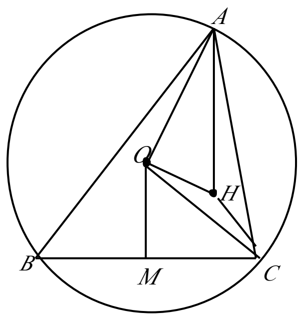
$\therefore AD\perp AB$，$CD\perp BC$. 又垂心为 H，$AH\perp BC$，$CH\perp AB$，

$\therefore AH \parallel CD$，$CH\parallel AD$，

$\therefore$四边形 AHCD 为平行四边形，$\therefore \overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$，

故 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. 从而 $m=1$.

【解法三】 过点 O 作 $OM\perp BC$ 于 M，则 M 是 BC 的中点，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$；H 是垂心，则 $AH\perp BC$，故 $\overrightarrow{AH}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 共线，可设 $\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{OM}$，则



$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\frac{k}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

又 $\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

故可得 $(m-1)\overrightarrow{OA}+(m-\frac{k}{2})(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\vec{0}$

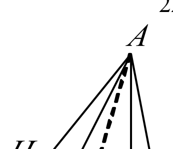
即 $(m-1)\overrightarrow{OA}+(2m-k)\overrightarrow{OM}=\vec{0}$

而 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 不恒共线，

故有 $m-1=2m-k=0$，得 $m=1$.

其实本题的结论是关于三角形的欧拉定理，即：设 O、G、H 是 ΔABC 的外心、重心和垂心，则 O、G、H 三点共线，且 OG：GH=1：2. 为此只需要证明三角形的欧拉定理即可.

【解法四】 如图所示，设 G 为 ΔABC 的重心，由题意可知 O、H 分别为 ΔABC 的外心和垂心. 设 BC 边上的高为 AH_1，AB 边上的高为 CH_2，过点 O 作 $OO_1\perp BC$ 于 O_1，$OO_2\perp AB$ 于



O_2，连接 O_1O_2，则有

$O_1O_2 \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AC$，从而 $\frac{O_1O_2}{AC}=\frac{O_1G}{AG}=\frac{1}{2}$，所以 $OO_1 // AH_1$.

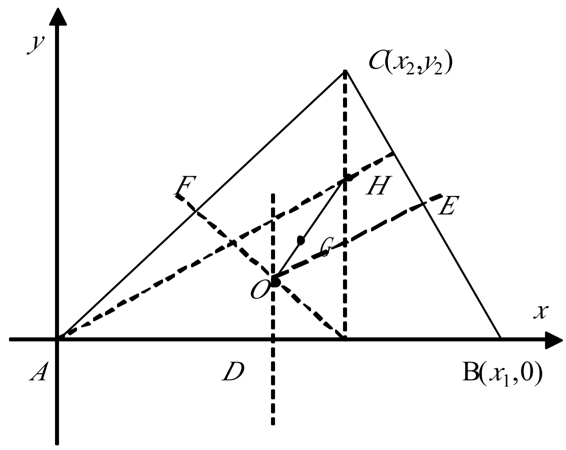
$$\therefore \frac{O_1O_2}{AC}=\frac{OO_1}{AH},\angle OO_1O_2=\angle HAC$$

$\therefore \Delta O_1O_2O \sim \Delta ACH$，于是可得：$\angle O_1OO_2=\angle AHC=\angle H_2HH_1$，且由 H 为垂心可得：

$\frac{OG}{GH}=\frac{O_1G}{GA}=\frac{1}{2}$. 利用向量表示就是 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. 而 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，从而即可得 $m=1$.（本题中 O、G、H 三点共线，即为欧拉线）.

本例如果用平面几何知识、向量的代数运算和几何运算处理，都相当麻烦，而借用向量的坐标形式，将向量的运算完全化为代数运算，这样就将“形”和“数”紧密地结合在一起，从而，很多对称、共线、共点、垂直等问题的证明，都可转化为熟练的代数运算的论证

【解法五】 以 A 为原点，AB 所在的直线为 x 轴，建立如图所示的直角坐标系. 设 $A(0,0)$、$B(x_1,0)$、$C(x_2,y_2)$，D、E、F 分别为 AB、BC、AC 的中点，则有：



D $(\frac{x_1}{2},0)$、$E(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_2}{2})$、$F(\frac{x_2}{2},\frac{y_2}{2})$

由题设可设 $O(\frac{x_1}{2},y_3),H(x_2,y_4)$，$G(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_2}{3})$

$$\therefore \overrightarrow{AH}=(x_2,y_4),\overrightarrow{OF}=(\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2},\frac{y_2}{2}-y_3)$$

$$\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1,y_2)$$

$$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\therefore \overrightarrow{AH}\bullet\overrightarrow{BC}=x_2(x_2-x_1)+y_2y_4=0\therefore y_4=-\frac{x_2(x_2-x_1)}{y_2}$$

$$\because \overrightarrow{OF}\perp\overrightarrow{AC}\therefore \overrightarrow{OF}\bullet\overrightarrow{AC}=x_2(\frac{x_2}{2}-\frac{x_1}{2})+y_2(\frac{y_2}{2}-y_3)=0\therefore y_3=\frac{x_2(x_2-x_1)}{2y_2}+\frac{y_2}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OH}=(x_2-\frac{x_1}{2},y_4-y_3)=(\frac{2x_2-x_1}{2},-\frac{3x_2(x_2-x_1)}{2y_2}-\frac{y_2}{2})$$

$$\therefore \overrightarrow{OG}=(\frac{x_2+x_1}{3}-\frac{x_1}{2},\frac{y_2}{3}-y_3)=(\frac{2x_2-x_1}{6},\frac{y_2}{3}-\frac{x_2(x_2-x_1)}{2y_2}-\frac{y_2}{2})$$

$$=(\frac{2x_2-x_1}{6},-\frac{3x_2(x_2-x_1)}{6y_2}-\frac{y_2}{6})=\frac{1}{3}(\frac{2x_2-x_1}{2},-\frac{3x_2(x_2-x_1)}{2y_2}-\frac{y_2}{2})$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$$

即 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，故从而即可得 $m=1$.

著名的“欧拉定理”讲的是锐角三角形的“三心”——外心、重心、垂心的位置关系:

（1）三角形的外心、重心、垂心三点共线——“欧拉线”;

（2）三角形的重心在“欧拉线”上，且为外——垂连线的第一个三分点，即重心到垂心的距离是重心到外心距离的 2 倍。

“欧拉定理”的向量形式显得特别简单，可简化成如下的向量问题.

设 O、G、H 分别是锐角△ABC 的外心、重心、垂心. 则 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

证明　按重心定理　G 是△ABC 的重心 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

按垂心定理　$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

由此可得　$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$.

习题 1（A 组）

1. D 提示：若 $a=0$，则 $b\neq 0$，则 $b^2>ac=0$．若 $a\neq 0$，则对于二次函数 $f(x)=ax^2-bx+c$，由 $f(2)>0, f(-1)<0$ 可得结论.

2. A　3. A　4. D　5. A　6. C

7.　1　解析：设 $\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}=x$，由公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+2ab(a+b)$ 得:

$(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})+3\cdot\sqrt[3]{(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}})}\cdot x=x^3$，即 $x^3+x-2=0$，分解因式得:

$(x-1)(x^2+x+2)=0$，$\because x^2+x+2>0$，$\therefore x-1=0$，即 $x=1$，$\therefore$原式等于 1.

8.　0 或 2 或 3 或 4．提示：令 $C_1: y=|x|-\sqrt{2}, C_2: y=-\sqrt{t-x^2}$，利用数形结合知：当 $0<t<1$ 或 $t>2$ 时，方程无实数根;

当 $t=1$ 时，方程有 2 个实数根;

当 $t=2$ 时，方程有 3 个实数根;

当 $1<t<2$ 时，方程有 4 个实数根。

9. $(-2,2)$. 提示: 令 $x=\sec\alpha, y=\tan\alpha$.

10. 6385. 解析: 对每个 $n\in N^*$, $a_n+a_{n+1}=-3n$ ……①, $a_na_{n+1}=b_n$ ……②,

将①写作 $a_{n+1}+\dfrac{3(n+1)}{2}-\dfrac{3}{4}=-\left(a_n+\dfrac{3n}{2}-\dfrac{3}{4}\right)$, 因此 $\left\{a_n+\dfrac{3n}{2}-\dfrac{3}{4}\right\}$ 是一个公比为 -1 的等比数列, 故 $a_n+\dfrac{3n}{2}-\dfrac{3}{4}=(-1)^{n-1}\dfrac{7}{4}$, 即 $a_n=-\dfrac{3(2n-1)}{4}+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{7}{4}$,

$a_{n+1}=-\dfrac{3(2n+1)}{4}+(-1)^n\cdot\dfrac{7}{4}$; 于是 $b_n=a_na_{n+1}=\dfrac{9}{4}n^2-\dfrac{29}{8}+(-1)^n\cdot\dfrac{21}{8}$; $\sum\limits_{k=1}^{20}b_k=6385$.

11. $a=1$ 或 $a\le -1$ 解析: 由 $A=\{x|x^2+4x=0\}=\{x|x=0$ 或 $x=-4\}=\{0,-4\}$.

$\because B\subseteq A$, $\therefore B=\varnothing$ 或 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$ 或 $B=\{0,-4\}$.

当 $B=\varnothing$ 时, 即 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 无实根, 由 $\Delta<0$,

即 $4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$, 解得 $a<-1$;

当 $B=\{0\}$ 时, 由根与系数的关系: $0+0=-2(a+1), 0\times 0=a^2-1\Rightarrow a=-1$;

当 $B=\{-4\}$ 时, 由根与系数的关系: $-4-4=-2(a+1)$, $(-4)\times(-4)=a^2-1\Rightarrow a\in\varnothing$;

当 $B=\{0,-4\}$ 时, 由根与系数的关系: $0-4=-2(a+1), 0\times(-4)=a^2-1\Rightarrow a=1$;

综上所得 $a=1$ 或 $a\le -1$.

12. (10,6) 解析: $P(A)=\dfrac{C_m^2+C_n^2}{C_{m+n}^2}, P(B)=\dfrac{C_m^1C_n^1}{C_{m+n}^2}$, 由于 $P(A)=P(B)$, 所以 $C_m^2+C_n^2=C_m^1C_n^1$, 整理得 $(m-n)^2=m+n$. 即 $m+n$ 是完全平方数, 且 $9\le m+n\le 19$, 因此

$\begin{cases}m+n=9\\m-n=3\end{cases}$, $\begin{cases}m+n=16\\m-n=4\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}m=6\\n=3\end{cases}$ (不合条件), $\begin{cases}m=10\\n=6\end{cases}$.

所以 $(m,n)=(10,6)$.

13. 证明: 由题意知 $a_2=2, a_n>0, n\in N^*$. 当 $n=1$ 时, $\dfrac{1}{a_1}=1>2(\sqrt{2}-1)$, 命题成立;

当 $n\ge 2$ 时, 由 $a_{n+1}\cdot a_n=n+1$, 得 $a_n\cdot a_{n-1}=n$, $\therefore a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=1$,

$\frac{1}{a_n}=a_{n+1}-a_{n-1}$，从而有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}(a_{k+1}-a_{k-1})=a_{n+1}+a_n-2\geq 2\sqrt{a_{n+1}a_n}-2\geq 2(\sqrt{n+1}-1)$.

14. （I）证明：依题意知：$CD\perp AD.$又$\because$面$PAD\perp$面$ABCD$

$\therefore DC\perp$平面$PAD.$

又$DC\subset$面PCD　$\therefore$平面$PAD\perp$平面$PCD.$

（II）由（I）知 $PA\perp$平面 $ABCD$

$\therefore$平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$.

在 PB 上取一点 M，作 $MN\perp AB$，则 $MN\perp$平面 $ABCD$，

设 $MN=h$

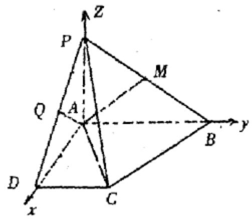
则 $V_{M-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times h=\frac{h}{3}$

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$　要使 $V_{PDCMA}:V_{MACB}=2:1$，即$(\frac{1}{2}-\frac{h}{3}):\frac{h}{3}=2:1$，解得$h=\frac{1}{2}$

即 M 为 PB 的中点.

（III）以 A 为原点，AD、AB、AP 所在直线为 x，y，z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系



则 A（0，0，0），B（0，2，0），

C（1，1，0），D（1，0，0），

P（0，0，1），M（0，1，$\frac{1}{2}$）

由（I）知平面 $PAD\perp$平面PCD,作$AQ\perp PD$，则

$AQ\perp$平面PDC,则$\overrightarrow{AQ}$为平面PCD的法向量。又 $\because\Delta PAD$为等腰 $Rt\Delta$

$\therefore Q$为PD的中点,即$Q(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$

因为　$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{AM}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})(0,1,\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\neq 0$,所以$\overrightarrow{AQ}$不垂直$\overrightarrow{AM}$

所以 AM 与平面 PCD 不平行.

15. 解：（1）设$0\leq x_1<x_2<+\infty$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)[\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x_1)^2}+\sqrt[3]{1+x_1}\cdot\sqrt[3]{1+x_2}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}}-\lambda]$.

设 $M=\sqrt[3]{(1+x_1)^2}+\sqrt[3]{1+x_1}\cdot\sqrt[3]{1+x_2}+\sqrt[3]{(1+x_2)^2}$，则显然 $M>3$.

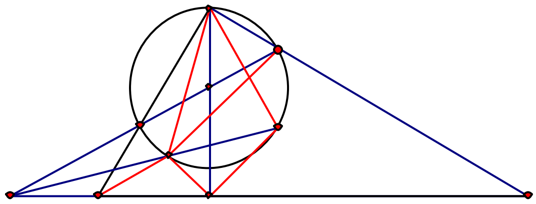
$\because f(x_1)-f(x_2)>0$，$\therefore \lambda>\frac{1}{M}$，$\because \frac{1}{M}<\frac{1}{3}$，$\therefore$只需要 $\lambda\geq\frac{1}{3}$，就能使 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数；

（2）此单调性不能扩展到整个定义域上，这可由单调性定义说明之；

（3）构造函数 $g(x)=2x-\sqrt[3]{1+x}$，由（1）知当 $x>0$ 时，$g(x)$ 是单调递增函数。$\because$ $g(7)=12$，$\therefore 2x-\sqrt[3]{1+x}<12.\Leftrightarrow g(x)<g(7)$，$\therefore x<7$，$\therefore$所求解集为 $(-\infty,7)$.

（B组）

1. 证：如图，连 DI_1,DI_2,BI_1,AI_2,I_1F，由 $\angle EAF=90^0$，则圆心 O 在 EF 上，设直径 EF 交 AD 于 O'，并简记 ΔABC 的三内角为 A,B,C，由 $\angle I_1BD=\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\angle DAC$ $=\angle I_2AD,\angle I_1DB=45^0=\angle I_2DA$，



所以 $\Delta DBI_1\backsim\Delta DAI_2$，得 $\frac{DI_1}{DI_2}=\frac{DB}{DA}$，且 $\angle I_1DI_2=90^0=\angle BDA$，故 $\Delta I_1DI_2\backsim\Delta BDA$，而 $\angle DI_1I_2=B,\angle AI_1D=90^0+\frac{B}{2}$，

注意 $\angle AI_1D=\angle AI_1F+\angle FI_1I_2+\angle DI_1I_2$，$\angle AI_1F=\angle AEF,\angle FI_1I_2=\angle FAI_2=\frac{B}{2}$，

所以 $\angle AEF=90^0-B=C=\angle DAB$，因此 $O'E=O'A$，同理得 $O'F=O'A$，故 O' 与 O 重合，即圆心 O 在 AD 上，而 $\angle EOD=\angle OEA+\angle OAE=2\angle OAE=2C$，

$\angle EOI_1=2\angle EAI_1=\angle BAD=C$，所以 OI_1 平分 $\angle DOM$；

同理得 OI_2 平分 $\angle DOF$，即 I_1 是 ΔODM 的内心，I_2 是 ΔODM 的旁心.

证二：如图，因为 $\angle BAC=90°$，故 ΔAI_1I_2 的外接圆圆心 O 在 EF 上，连 OI_1,OI_2,I_1D,I_2D，则由 I_1,I_2 为内心知，

$\angle I_1AI_2=45°$，所以

$\angle I_1OI_2=2\angle I_1AI_2=90°=\angle I_1DI_2$，

于是 O,I_1,D,I_2 四点共圆，所以

$\angle I_2I_1O=\angle I_1I_2O=45°$，又因 $\angle I_2DO=\angle I_2I_1O=45°=\angle I_2DA$，因此点 O 在 AD 上，

即O为EF与AD的交点．设AD与$\odot O$交于另一点H，而由$\angle EAI_1=\angle I_1AH_2$，

$\angle HAI_2=\angle FAI_2$，可知，$I_1,I_2$分别为$\overset{\frown}{EH},\overset{\frown}{HF}$的中点，所以$\angle EOI_1=\angle DOI_1$，

$\angle DOI_2=\angle FOI_2$．因此，点$I_1,I_2$分别为$\Delta OMD$的内心与旁心．

2.【解法一】关键是求三个数字：

第一个数：能够同时被 3 和 4 整除，但除以 5 余 4 即 1 2＊2 ＝ 2 4

第二个数：能够同时被 4 和 5 整除，但除以 3 余 1 即 2 0＊2 ＝ 4 0

第三个数：能够同时被 3 和 5 整除，但除以 4 余 2 即 1 5＊2 ＝ 3 0

这三个数的最小公倍数为 6 0．

所以满足条件的最小的数字为 2 4＋4 0＋3 0－6 0 ＝ 3 4．

【解法二】被 3 除余 1，被 4 除余 2 设这个数是 x

也就是 x+2 是 3 的倍数和 4 的倍数,故 x+2 是 12 的倍数 ,那 x 就是 10 22 34......

又 x+1 是 5 的倍数,34 符合

【解法三】被 5 除余 4，那么个位应该是 4 或 9；被 4 除余 2，那么个位应为偶数，所以个位数必须是 4，因此带入 N+4 ，N＝10，20，30……，依此类推，算出最小符合的，即为 34

【解法四】题中 3、4、5 三个数两两互质。

则〔4，5〕=20;〔3，5〕=15;〔3，4〕=12;〔3，4，5〕=60。

为了使 20 被 3 除余 1，用 20×2=40;

使 15 被 4 除余 1，用 15×3=45;

使 12 被 5 除余 1，用 12×3=36。

然后，40×1＋45×2＋36×4=274，

因为，274>60，所以，274－60×4=34，就是所求的数。

【解法五】被 3 除余 1：1，4，7，10，13；被 4 除余 2：2，6，10，14。可以把两个条件组成一个条件，被 12 除余 10。因为 10 是两个条件都满足的最小数。接下就是被 12 除余 10 和，被 5 除余 4 的条件了 12 除余 10：10，22，34，被 5 除余 4：4，9，14，19，24，29,34。答案出来了。两个条件组合后就是，被 60 除余 34 的最小数是几，那就是 34。

3. 解：$f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2+\frac{4}{3}abc=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+\frac{4}{3}abc$

$$=9-2\left(ab+bc+ca-\frac{2}{3}abc\right)$$

因为a,b,c是ΔABC三边长，且$a+b+c=3$，所以 $0<a,b,c<\frac{3}{2}$，

于是 $$(\frac{3}{2}-a)(\frac{3}{2}-b)(\frac{3}{2}-c)\le(\frac{\frac{3}{2}-a+\frac{3}{2}-b+\frac{3}{2}-c}{3})^3=\frac{1}{8}$$

即 $$ab+bc+ca-\frac{2}{3}abc\le\frac{7}{3}$$

$\therefore\quad f(a,b,c)\geq 9-2\times\dfrac{7}{3}=\dfrac{13}{3}$. 等号当且仅当 $a=b=c=1$ 时取到，

故 $f(a,b,c)$ 的最小值为 $\dfrac{13}{3}$.