$= a_{n+1} - 2^{n+1} + 1, n \in N^+$ 且 $a_1, a_2 + 5, a_3$ 等差数列.

(1) 求 a_1 的值,

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 略.

解:(1) 略解得 $a_1 = 1$.

(2) 由 $2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$,可得 $2S_{n-1} = a_n - 2^n + 1(n \geqslant 2)$,两式相减,可得 $2a_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$,即 $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$,$\therefore \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,$\therefore \frac{a^{n+1}}{3^{n+1}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \frac{a_n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n$,$\therefore$ 数列 $\left\{\frac{a_n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ 是常数列,$\therefore \frac{a_n}{3^n} + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{a_1}{3} + \frac{2}{3} = 1$,$\therefore a_n = 3^n - 2^n$.

变式5　记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,若 $4S_n = a_{n+1} - 3^{n+1} - 3, a_1 = 0$,则用 n 表示数列通项 a_n 是________.(二十四届"希望杯"全国数学邀请赛高二第一试试题)

解:$\because a_1 = 0, \therefore 4S_1 = a_2 - 3^2 - 3$,即 $a_2 = 12$,$\because 4S_n = a_{n+1} - 3^{n+1} - 3$,$\therefore$ 当 $n \geqslant 2$ 时,$4a_n = 4S_n - 4S_{n-1} = a_{n+1} - a_n - 3^{n+1} + 3^n$,即 $a_{n+1} = 5a_n + 2 \times 3^n$,$\therefore \frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} = \frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n$,设 $b_n = \frac{a_n}{5^n}$,则 $b_{n+1} - b_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n (n \geqslant 2)$,即 $b_{n+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = b_n + \left(\frac{3}{5}\right)^n (n \geqslant 2)$,即数列 $\left\{b_n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ 从第 2 项起是常数列.

$\therefore b_n + \left(\frac{3}{5}\right)^n = b_2 + \frac{9}{25} = \frac{21}{25}$,

$$\therefore a_n = \begin{cases} 0, n = 1, \\ 21 \times 5^{n-2} - 3^n, n \geqslant 2. \end{cases}$$

对一道韩国数学竞赛题的探索分析

辽宁省抚顺市第一中学　(113000)　洪恩锋　王柏松

2009 年韩国奥林匹克竞赛中有下列一道试题:已知 a,b,c 是正数,求证:$\frac{a^3}{c(a^2+bc)} + \frac{b^3}{a(b^2+ac)} + \frac{c^3}{b(c^2+ab)} \geqslant \frac{3}{2}$.

一、结构分析

此不等式结构特征明显是分式轮换不等式,且取等时满足"$a = b = c$",由于结构形式复杂,将其适当变形后得到:

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\frac{a}{c}+\frac{b}{a}} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{b}{a}+\frac{c}{b}} + \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^2}{\frac{c}{b}+\frac{a}{c}} \geqslant \frac{3}{2}.$$

通过观察发现分子,分母均有分式 $\frac{a}{c}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}$;设 $\frac{a}{c} = x, \frac{b}{a} = y, \frac{c}{b} = z$,则上述不等式等价于:若 $x, y, z \in R^+$,且 $xyz = 1$. 证明:$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geqslant \frac{3}{2}$. (1)

二、解法初探

下面介绍证明分式轮换不等式最常用的两种方法:

1. 柯西不等式变式:若 $x_i, y_i \in R^+$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{x_i} \geqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

直接引用柯西不等式的变式得 $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}(x+y+z) \geqslant \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$.

2. 基本不等式变形:若 $b > 0$,则 $\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$.

由基本不等式取等条件可知,需要"$a = b$",在式子 $\frac{x^2}{x+y}$ 中,由(1)式可知取等需要满足"$x = y = z = 1$"此时,$x = 1, x + y = 2$,故式子 $\frac{x^2}{x+y}$ 无法直接引用基本不等式变式,因为不满足取等. 若要引用基本不等式变式,只需凑数使得满足取等即可,故将

(1) 式等价变形为 $\frac{4x^2}{x+y}+\frac{4y^2}{y+z}+\frac{4z^2}{z+x}\geqslant 6$(2)

引用基本不等式变式得到：$\frac{4x^2}{x+y}\geqslant 4x-(x+y)$①，$\frac{4y^2}{y+z}\geqslant 4y-(y+z)$②，$\frac{4z^2}{z+x}\geqslant 4z-(z+x)$③，①+②+③，有 $\frac{4x^2}{x+y}+\frac{4y^2}{y+z}+\frac{4z^2}{z+x}\geqslant 2(x+y+z)\geqslant 2\cdot 3\sqrt[3]{xyz}=6$.

三、二次挖掘

1. 类比寻根

由上述三种证明不难发现(1)式若 $x,y,z\in R^+$，且 $xyz=1$，证明：$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\geqslant\frac{3}{2}$，可推广为：若 $x,y,z\in R^+$，且 $xyz=1$，证明：$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{3}{2}$(《数学通报》数学问题 1201 题)(3)，令 $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$，代入(3)式变为：若 $a,b,c\in R^+$，且 $abc=1$ 求证：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$(第 36 届 *IMO* 题).

可见 2009 年的这道韩国数学竞赛题很可能是命题专家依据 1995 年第 36 届国际数学奥林匹克竞赛试题改编而来.

注：王森生老师在文[2]中对这道第 36 届国际数学奥林匹克试题给出了 21 种证法，仿照这 21 种证法，那么上述这道韩国奥林匹克试题还可以获得很多种证法. 所以本文只是给出最常见最易上手的两种证法.

2. 试题推广

将试题从线性系数、幂数、元数三方面入手，进行推广

(ⅰ) 将 a^2+bc 一般线性化推广

若 $a,b,c,s,t\in R^+$，则 $\frac{a^3}{c(sa^2+tbc)}+\frac{b^3}{a(sb^2+tac)}+\frac{c^3}{b(sc^2+tab)}\geqslant\frac{3}{s+t}$.

(ⅱ) 将幂数一般化推广

若 $a,b,c\in R^+$，则 $\frac{a^{2n+1}}{c^{2n-1}(a^2+bc)}+\frac{b^{2n+1}}{a^{2n-1}(b^2+ac)}+\frac{c^{2n+1}}{b^{2n-1}(c^2+ab)}\geqslant\frac{3}{2}(n\in N^*)$.

(ⅲ) 将三元一般化推广

若 $a_i\in R^+(i=1,2,3,\cdots,n)$，则 $\frac{a_1^3}{a_2(a_1^2+a_2a_n)}+\frac{a_2^3}{a_3(a_2^2+a_3a_1)}+\cdots+\frac{a_{n-1}^3}{a_n(a_{n-1}^2+a_na_{n-2})}+\frac{a_n^3}{a_1(a_n^2+a_1a_{n-1})}\geqslant\frac{n}{2}$.

(ⅳ) 结合(ⅰ)(ⅱ)更一般化推广

若 $a,b,c,s,t\in R^+$，则 $\frac{a^{2n+1}}{c^{2n-1}(sa^2+tbc)}+\frac{b^{2n+1}}{a^{2n-1}(sb^2+tac)}+\frac{c^{2n+1}}{b^{2n-1}(sc^2+tab)}\geqslant\frac{3}{s+t}(n\in N^*)$.

(ⅴ) 结合(ⅰ)(ⅲ)更一般化推广

若 $s,t,a_i\in R^+(i=1,2,3,\cdots,n)$，则 $\frac{a_1^3}{a_2(sa_1^2+ta_2a_n)}+\frac{a_2^3}{a_3(sa_2^2+ta_3a_1)}+\cdots+\frac{a_{n-1}^3}{a_n(sa_{n-1}^2+ta_na_{n-2})}+\frac{a_n^3}{a_1(sa_n^2+ta_1a_{n-1})}\geqslant\frac{n}{s+t}$.

(ⅵ) 结合(ⅱ)(ⅲ)更一般化推广

若 $a_i\in R^+(i=1,2,3,\cdots,n)$，则 $\frac{a_1^{2m+1}}{a_2^{2m-1}(a_1^2+a_2a_n)}+\frac{a_2^{2m+1}}{a_3^{2m-1}(a_2^2+a_3a_1)}+\cdots+\frac{a_{n-1}^{2m+1}}{a_n^{2m-1}(a_{n-1}^2+a_na_{n-2})}+\frac{a_n^{2m+1}}{a_1^{2m-1}(a_n^2+a_1a_{n-1})}\geqslant\frac{n}{2}(m\in N^*)$.

(ⅶ) 结合(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ)最终推广

若 $s,t,a_i\in R^+(i=1,2,3,\cdots,n)$，则 $\frac{a_1^{2m+1}}{a_2^{2m-1}(sa_1^2+ta_2a_n)}+\frac{a_2^{2m+1}}{a_3^{2m-1}(sa_2^2+ta_3a_1)}+\cdots+\frac{a_{n-1}^{2m+1}}{a_n^{2m-1}(sa_{n-1}^2+ta_na_{n-2})}+\frac{a_n^{2m+1}}{a_1^{2m-1}(sa_n^2+ta_1a_{n-1})}\geqslant\frac{n}{s+t}(m\in N^*)$.

一道经典试题，如同一颗枝繁叶茂的参天大树，年复一年，花开花落，必然在其周围播下种子繁衍后代.

参考文献

[1]王森生. 一道韩国奥林匹克试题的简证与探究[J]. 福建中学数学，2013(12).

[2]王森生. 数学百题精彩千解[M]. 福建教育出版社，2009.