2005 年重庆市初中数学竞赛

一、选择题(每小题 5 分,共 35 分)

1. 已知实数 a **满足**

$$|2\,004-a|+\sqrt{a-2\,005}=a.$$

那么, $a-2\,004^2$ **的值为(　　).**

(A) 2 003　(B) 2 004　(C) 2 005　(D) 2 006

2. 某商店出售某种商品每件可获利 m **元,利润率为** 20 % **(利润率** $=\dfrac{\text{售价}-\text{进价}}{\text{进价}}$**). 若这种商品的进价提高** 25 %**,而商店将这种商品的售价提高到每件仍可获利** m **元,则提价后的利润率为(　　).**

(A) 25 %　　(B) 20 %

(C) 16 %　　(D) 12.5 %

3. 如图 1**,一个球形的罐内装有一种不溶于水且比空气重的惰性气体,工人师傅向罐内匀速注水,把这种气体排出. 那么,图** 2 **中能表示罐中剩余气体(** y L**)与注水时间(** t**)的函数关系的图像是(　　).**

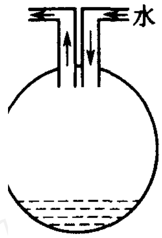


图 1

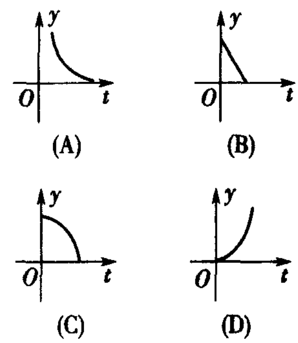


图 2

4. 若 x_0 **是一元二次方程** $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$ **的根,设**

$$M=(2ax_0+b)^2,\ N=b^2-4ac.$$

则 M **与** N **的大小关系是(　　).**

(A) $M<N$　　(B) $M=N$

(C) $M>N$　　(D) $N<M<2N$

5. 如图 3**,将一张正方形的纸片剪一下,剪成一个三角形和一个梯形. 如果三角形与梯**

$$3(2x-210-y)=x+y,$$

即 $x=126+\dfrac{4}{5}y.$

由 $y>0$ 知 y 至少为 5,即 $x\geq126+4=130.$

所以,甲队至少有 130 人.

15. (1) 图 9 给出了一种符合要求的填法.

(2) 共有 6 种不同填法.

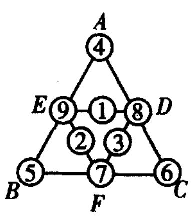


图 9

把填入 A、B、C 三处圈中的三个数字之和记为 x;D、E、F 三处圈中的三个数字之和记为 y;其余三个圈中所填的数字之和记为 z. 显然,有

$$x+y+z=1+2+\cdots+9=45. \qquad ①$$

图 9 中六条边,每条边上三个圈中之数的和为 18,所以,有

$$z+3y+2x=6\times18=108. \qquad ②$$

②-①得

$$x+2y=108-45=63. \qquad ③$$

把 AB、BC、CA 每一条边上三个圈中之数的和相加,则可得

$$2x+y=3\times18=54. \qquad ④$$

联立式③、④,解得 $x=15$, $y=24$,继而知 $z=6$.

在 1,2,…,9 中三个数之和为 24 的仅为 7、8、9,所以,在 D、E、F 三处圈中,只能填 7、8、9 三个数,共有 6 种不同的填法.

显然,当这三个圈中之数一旦确定,根据题目要求,其余六个圈中之数也随之确定.

从而得出结论,共有 6 种不同的填法.

(李耀文　提供)

形的面积比为 3∶5,则它们的周长比为(　　).

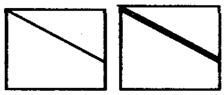


图 3

(A) 3∶5

(B) 4∶5

(C) 5∶6　　(D) 6∶7

6. 已知坐标原点 O **和点** $A(2,-2)$,B **是坐标轴上的一点. 若** $\triangle AOB$ **是等腰三角形,则这样的点** B **一共有(　　)个.**

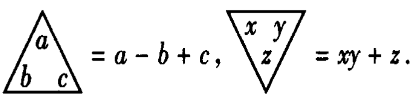
(A) 4　　(B) 5　　(C) 6　　(D) 8

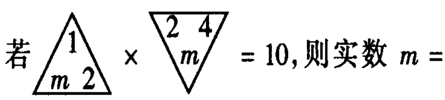
7. 在一元二次方程 $x^2+mx+n=0$ **中,系数** m、n **可在** 1,2,3,4,5,6 **中取值. 则得到的不同方程中,有实数根的方程的个数为(　　).**

(A) 20　　(B) 19　　(C) 16　　(D) 10

二、填空题(每小题 5 分,共 35 分)

8. 定义运算





9. 将一列数

$\sqrt{2}$,2,$\sqrt{6}$,$2\sqrt{2}$,$\sqrt{10}$,…,$10\sqrt{2}$

按下面的方法进行排列:

$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{14}$	4	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$
$\sqrt{22}$	$2\sqrt{6}$	…	…	…
…				…
…	…	…	…	$10\sqrt{2}$

按此方法进行排列,$3\sqrt{2}$**的位置可记为**(2,4),$2\sqrt{6}$**的位置可记为**(3,2). **那么,这列数中的最大有理数按此排法的位置可记为**______.

10. 设 $0.\overline{a_1a_2a_3 1}$**为四位十进制纯小数**,$a_i(i=1,2,3)$**只取** 0 **或** 2,**记** T **是所有这些四位小数的个数**,S **是所有这些四位小数的和. 则**$\frac{S}{T}=$______.

11. 已知正数 a、b、c、d、e、f,**同时满足**

$$\frac{bcdef}{a}=\frac{1}{2},\frac{acdef}{b}=\frac{1}{4},\frac{abdef}{c}=\frac{1}{8},$$

$$\frac{abcef}{d}=2,\frac{abcdf}{e}=4,\frac{abcde}{f}=8.$$

则 $a+b+c+d+e+f$ **的值为**______.

12. 设在直角坐标平面上,不等式$|x|+|y|\leqslant 3$ **围成的多边形的周长为** p. **则** p **的值为**______.

13. 如图 4,**等腰** Rt$\triangle ABC$ **的面积等于** 98,D **是斜边** BC **上的一点**,$BD∶DC=2∶5$. **则以** AD **为边的正方形** $ADEF$ **的面积等于**______.

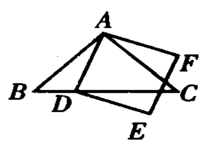


图 4

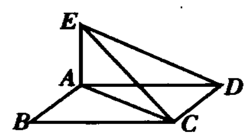


图 5

14. 如图 5,**已知** $\square ABCD$,$\angle ACB=30°$,**将** $\triangle ABC$ **沿** AC **折叠,使得点** B **落在** $\square ABCD$ **所在平面的点** E **处,联结** DE. **则**$\frac{AC+DE}{AD}$**的值为**______.

三、解答题

15. (16 分) **在一次活动课中,老师请每位同学自己做一个如图** 6 **所示的有盖的长方体的纸盒. 长方体的长、宽、高分别为** x cm,y cm,z cm. **小杨在展示自己做的纸盒时,告诉同学们说:"我做的纸盒的长、宽、高都是正整数,且经测量发现它们满足** $xy=xz+3$,$yz=xy+xz-7$. **"请同学们算一算,做一个这样的纸盒至少需要多少平方厘米的纸板(接缝不算)?**

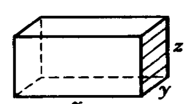


图 6

16. (16 分) **如图** 7,**在矩形** $ABCD$ **中**,E、F **分别是** AB、AD **上的点,过** E、F **作** $EH\,/\!/$

FG，分别交 BC、CD 于点 H、G，设 AB、AD 的长分别为 a、b（$a < b$）.

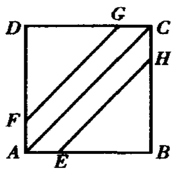


图 7

(1) 若 $AE = AF = 1$，且 $EH \parallel AC$ 时，是否存在这样的整数 a、b，使得 CH、CG 的长也均为整数？若存在，请求出 a、b 的值；若不存在，请说明理由.

(2) 试比较 $S_{\triangle AHG}$ 与 $S_{\triangle CEF}$ 的大小，并说明理由.

17. (18 分) 在编号为 1，2，…，200 的 200 个小球中，任意地摸出 k 个小球，使得其中必有两个小球的编号数 m、n 满足

$$\frac{2}{5} \leq \frac{n}{m} \leq \frac{5}{2}.$$

试确定 k 的最小值，并说明理由.

参 考 答 案

一、**1.** C.

因为 $a - 2\,005 \geq 0$，所以，

$a - 2\,004 + \sqrt{a - 2\,005} = a$.

故 $a - 2\,004^2 = 2\,005$.

2. C.

设原进价为 a 元，提价后的利润率为 $x\%$，则

$m = a \cdot 20\% = a(1 + 25\%) \cdot x\%$.

解得 $x\% = 16\%$.

3. B.

剩余气体与注水时间成一次函数.

4. B.

$x_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. 则 $(2ax_0 + b)^2 = b^2 - 4ac$.

5. D.

设梯形下底为 a，上底为 b（$a > b$），周长为 p，直角三角形的两直角边分别为 a、$a - b$，周长为 p_1. 则有

$a(a + b) \mathbin{:} a(a - b) = 5 \mathbin{:} 3$.

故 $b = \frac{1}{4}a$.

令 $a = 4$，$b = 1$，则

$p_1 \mathbin{:} p = (3 + 4 + 5) \mathbin{:} (1 + 4 + 4 + 5) = 6 \mathbin{:} 7$.

6. D.

满足题意的点 B 在 x 轴的正方向、y 轴的负方向各有 3 个，其他两半轴各有 1 个，共 8 个.

7. B.

$\Delta = m^2 - 4n \geq 0$，则 $m^2 \geq 4n$.

当 $n = 1$ 时，$m = 2,3,4,5,6$，共 5 个；

当 $n = 2$ 时，$m = 3,4,5,6$，共 4 个；

当 $n = 3$ 时，$m = 4,5,6$，共 3 个；

当 $n = 4$ 时，$m = 4,5,6$，共 3 个；

当 $n = 5$ 时，$m = 5,6$，共 2 个；

当 $n = 6$ 时，$m = 5,6$，共 2 个.

合计 19 个.

二、**8.** 2 或 -7.

由 $(3 - m)(8 + m) = 10$ 即得.

9. (20，3).

数列按偶数算数平方根排列，$\sqrt{2}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{6}$，…，$\sqrt{200}$，共 100 个. 每行 5 个共 20 行，最大有理数为 $\sqrt{196} = 14$.

10. 0.111 1.

$a_1 a_2 a_3$ 可分别为

000，200，020，002，022，202，220，222.

共 8 种. 则 $S = 0.888\,8$.

11. $\frac{5}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

6 个等式两端相乘得 $(abcdef)^4 = 1$. 则 $abcdef = 1$，

$a^2 = 2$，$b^2 = 4$，$c^2 = 8$，$d^2 = \frac{1}{2}$，$e^2 = \frac{1}{4}$，$f^2 = \frac{1}{8}$.

故 $a + b + c + d + e + f$

$= \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

$= \frac{5}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{4}$.

12. $12\sqrt{2}$.

多边形是边长为 $3\sqrt{2}$ 的菱形.

13. 116.

作 $DG \perp AB$，$DH \perp AC$，垂足分别为 G、H. 易知 $AB = AC = 14$.

又 $BD \mathbin{:} DC = GD \mathbin{:} HD = 2 \mathbin{:} 5$，则 $DG = 4$，$DH = 10$.

所以，$AD = \sqrt{4^2 + 10^2}$. 故 $S_{正方形ADEF} = 116$.

14. $\sqrt{3}$.

点 B 绕 AC 旋转 180° 后落在点 E，点 A、B、C、D、E 在一个平面上. $EC = BC = AD$，$AE = AB = CD$，

则四边形 $ACDE$ 是等腰梯形,且 $\angle DAC = 30°$. 延长 AC 至点 F,使 $CF = ED$,则 $\triangle ADF$ 是底角为 30°的等腰三角形.

故 $\frac{AC+DE}{AD}=\frac{AF}{AD}=\sqrt{3}$.

三、15. 因为 $xy = xz + 3$,所以,$x(y-z)=3$.

又 x、y、z 都是正整数,则有

$\begin{cases} x=3, \\ y-z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y-z=3. \end{cases}$

(1) 当 $\begin{cases} x=3, \\ y=z+1 \end{cases}$ 时,由 $yz = xy + xz - 7$,即

$(z+1)z = 3(z+1)+3z-7$,

整理得

$z^2-5z+4=0$.

解得 $\begin{cases} z_1=1, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} z_2=4, \\ y_2=5. \end{cases}$

故长方体纸盒表面积为

$2(xy+xz+yz)$

$=2(3\times2+3\times1+2\times1)=22(\mathrm{cm}^2)$,

或 $2(xy+xz+yz)$

$=2(3\times5+3\times4+5\times4)=94(\mathrm{cm}^2)$(舍去).

(2) 当 $\begin{cases} x=1, \\ y=z+3 \end{cases}$ 时,由 $yz = xy + xz - 7$,即

$(z+3)z = z+3+z-7$,

整理得

$z^2+z+4=0$.

此方程无实数解.

故做一个这样的纸盒至少需要 22 cm^2 的纸板.

16. (1) 不存在.

因为 $AB = a$,$AD = b$,$AE = AF = 1$,所以,

$BE = a-1$,$DF = b-1$.

又 $EH \parallel AC$,则 $\frac{BH}{BC}=\frac{BE}{AB}$,即

$\frac{b-CH}{b}=\frac{a-1}{a} \Rightarrow CH=\frac{b}{a}$.

同理可得,$CG=\frac{a}{b}$.

又因 $a<b$,则 CG 不是整数,故不存在整数 a、b 使得 CH、CG 的长均为整数.

(2) 设 $BE = m$,$DF = n$,则

$S_{\triangle CEF} = ab - (S_{\triangle BCE} + S_{\triangle DCF} + S_{\triangle AEF})$

$= ab - \frac{1}{2}[bm + an + (a-m)(b-n)]$

$=\frac{1}{2}(ab-mn)$.

设 $BH = p$,$DG = q$,则

$S_{\triangle AHG} = ab - (S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ADG} + S_{\triangle CHG})$

$= ab - \frac{1}{2}[ap + bq + (b-p)(a-q)]$

$=\frac{1}{2}(ab-pq)$.

易证 $\triangle BEH \backsim \triangle DGF$.

于是,有 $\frac{m}{p}=\frac{q}{n}$,即 $mn = pq$.

故 $S_{\triangle AHG} = S_{\triangle CEF}$.

17. 将编号为 1～200 的 200 个小球分成 6 组,使得每个小组中任意两个小球的编号数的比值不小于 $\frac{2}{5}$ 且不大于 $\frac{5}{2}$.

分组如下:

第 1 组　(1,2)

第 2 组　(3,4,5,6,7)

第 3 组　(8,9,10,…,20)

第 4 组　(21,22,23,…,52)

第 5 组　(53,54,55,…,132)

第 6 组　(133,134,135,…,200)

当 $k=7$ 时,在这 6 个小组的 200 个小球中,任意摸出 7 个小球,根据抽屉原理,必有两个小球属于同一个小组,这两个小球的编号数就是 m、n,一定满足

$\frac{2}{5} \le \frac{n}{m} \le \frac{5}{2}$.

故 k 的最小值是 7.

(李开珂　提供)

编 者 的 话

在我们收到的来稿中,常常见到一些由一个方法加几个题目组成的稿件。虽然文中所选例题很好,但是鲜见分析、归纳、评注,也不见对规律的总结,这样的文章对读者的益处较少。我们选用稿件时,一般希望来稿能够总结出一些规律性的认识或谈一些深入的分析与评注,或介绍试题的背景等,如果只是"一法几题一篇文"的稿件,编辑部很难选用。

本刊编辑部