2003年重庆市初中数学竞赛

一、选择题(每小题5分,共35分)

1.若$\left[x+\frac{1}{100}\right]+\left[x+\frac{2}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{99}{100}\right]+[x+1]=356$,其中$[x]$表示不大于$x$的最大整数,则$x$可取值为( ).

(A)3.54 (B)3.55 (C)3.44 (D)3.45

2.某台球桌为如图1所示的长方形$ABCD$,小球从A沿$45°$角击出,恰好经过5次碰撞到B处.则$AB:BC=$( ).

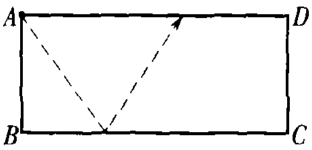


图1

(A)1:2 (B)2:3 (C)2:5 (D)3:5

3.正整数由小到大排成一列1,2,3,…去掉数列中的完全平方数和完全立方数后,不改变顺序,组成新数列.则第200个数是( ).

(A)216 (B)217 (C)218 (D)219

4.已知$x+y+xy+1=0$,$x^2y+xy^2+2=0$.则$(x-y)^2$等于( ).

(A)1或8 (B)0或9 (C)4或8 (D)4或9

5.如图2,在$\triangle ABC$中,E、D分别是边AB、AC上的点,BD、CE交于F,AF的延长线交BC于点H.若$\angle 1=\angle 2$,$AE=AD$,则图2中的全等三角形共有( )对.

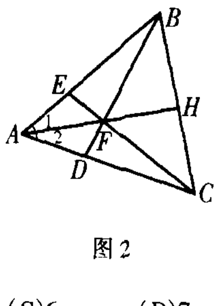


图2

(A)3 (B)5 (C)6 (D)7

6.若$x+\frac{1}{x}=3$,则$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值为( ).

(A)10 (B)8 (C)$\frac{1}{10}$ (D)$\frac{1}{8}$

7.如图3,$ABCD$是正方形,E是CF上的一点.若$DBEF$是菱形,则$\angle EBC$等于( ).

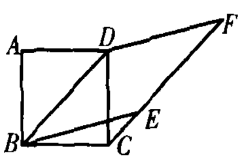


图3

(A)$15°$ (B)$22.5°$ (C)$30°$ (D)$25°$

二、填空题(每小题5分,共35分)

1.观察下列各式:

$97^2=9\ 409$,$997^2=994\ 009$,$9\ 997^2=99\ 940\ 009$.

猜想$999\ 998^2=$______.

2.当$a>3$时,不等式$ax+2<3x+b$的解集是$x<0$.则$b=$______.

3.x可以被11整除,且x的各位数字之和等于13.则x的最小值为______.

4.因式分解$4x^3-31x+15=$______.

5.如图4,在$\square ABCD$中,E、F分别是边AB、AD上的点,AC与EF交于点G,$\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2}$,$\frac{AF}{AD}=\frac{1}{3}$.则$\frac{AG}{AC}=$______.

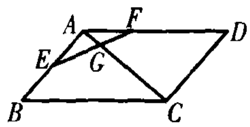


图4

6.如图5,在矩形$ABCD$中,$S_{\triangle ABE}=1.5$,$S_{\triangle ECF}=3$,$S_{\triangle ADF}=2$.则$S_{\triangle EFA}=$______.

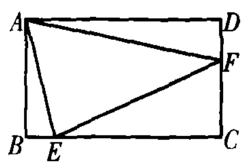


图5

7.如图6,$\triangle ABC$是边长为1的等边三角形,$\triangle BDC$是顶角$\angle BDC=120°$的等腰三角形,$\angle MDN=60°$.则$\triangle AMN$的周长=______.

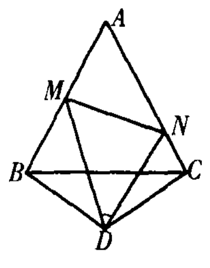


图6

三、解答题

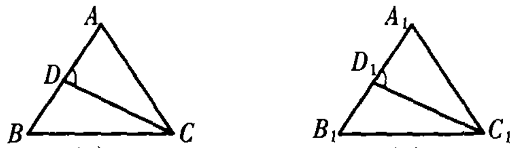
1.(16分)已知m、n为整数,且满足$2m^2+n^2+3m+n-1=0$.求m、n.

2.(16分)某校初一年级的新生男女同学的比例为8:7,一年后收转学生40名,男女同学的比例变为17:15.到初三年级时,原校有转学走的,又有新转学来的,统计知,净增人数10人,此时男女同学的比例变为7:6.问该校在初一年级时,招收的新生中,各招

了男女同学多少名?

注:该校初一年级新生人数不超过1 000人.

3.(18分)如图7,在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中,CD、C_1D_1分别是$\angle ACB$、$\angle A_1C_1B_1$的角平分线,且$CD=C_1D_1$,$AB=A_1B_1$,$\angle ADC=\angle A_1D_1C_1$.你能否判断$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$全等?如果能,请给出证明;如果不能,请说明理由.



(a)　　(b)

图7

参考答案

一、1.B　2.C　3.C　4.B　5.D　6.D　7.A

二、1.999 996 000 004　2.2　3.319　4.$(x+3)\cdot(2x-1)(2x-5)$　5.$\frac{1}{5}$　6.5.5　7.2

三、1.以m为元,得关于m的一元二次方程

$2m^2+3m+n^2+n-1=0$.

因为m有整数解,所以,

$\Delta=9-8(n^2+n-1)=17-8n(n+1)\geqslant 0$

且为完全平方数.

又n为整数,分以下几种情况:

(1)当$n=0$或$n=-1$时,$\Delta=17$,非完全平方数.

(2)当$n=1$或$n=-2$时,$\Delta=1$,代入得

$2m^2+3m+1=0$.

解得$m_1=-1$,$m_2=-\frac{1}{2}$(舍去).

(3)当$n\geqslant 2$或$n\leqslant -3$时,$\Delta<0$,方程无解.

综上知$m=-1,n=1$或$m=-1,n=-2$.

2.设初一年级共收新生$15a$人,初二年级学生总数为$32b$人,初三年级学生总数为$13c$人,a、b、c均为整数.由题意得

$$\begin{cases}15a+40=32b, & ①\\ 15a+50=13c. & ②\end{cases}$$

②-①得$c=\frac{2(16b+5)}{13}$,则$(16b+5)$是13的倍数.令$16b=13k+8$,即

$8(2b-1)=13k$.

故k是8的倍数,且为奇数倍.

当$k=8\times1$时,$b=7$代入①得

$32\times7-40=184$,$15\nmid 184$;

当$k=8\times3$时,$b=20$代入①得

$32\times20-40=600$,$15\mid 600$;

当$k=8\times5$时,$b=33$代入①得

$32\times33-40=1\,016>1\,000$,且$15\nmid 1\,016$.

综上知,该校招收初一年级新生600人,其中男生$600\times\frac{8}{15}=320$人,女生280人.

3.$\triangle ABC$能与$\triangle A_1B_1C_1$全等.

如图8,延长DA至E,使$AE=BD$,延长D_1A_1至E_1使$A_1E_1=B_1D_1$.

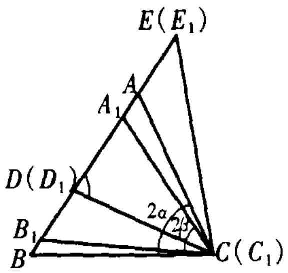


图8

因为$AB=DE=A_1B_1=D_1E_1$,

$\angle ADC=\angle A_1D_1C_1$,$DC=D_1C_1$,

所以,$\triangle EDC\cong\triangle E_1D_1C_1$.

令$\angle ACB=2\alpha$,$\angle A_1B_1C_1=2\beta$.

若$\alpha=\beta$,则$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

若$\alpha\neq\beta$,不妨设$\alpha>\beta$,将$\triangle E_1D_1C_1$放在$\triangle EDC$上,使D_1C_1与DC重合,ED与E_1D_1重合.

显然,D、D_1是同一个点,E、E_1是同一个点.

由于$\alpha>\beta$,故A_1在线段AD内,B_1在线段BD内.

因此,$AD>A_1D$,$BD>B_1D$.

又因为$BD=AE$,$A_1E_1=B_1D_1$,所以,

$DA+AE>D_1A_1+A_1E_1$.

这与$AD+AE=A_1D_1+A_1E_1$矛盾.

故$\alpha\leqslant\beta$.

同理,$\alpha\geqslant\beta$.

因此,$\alpha=\beta$,此时$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

(李开珂　提供)