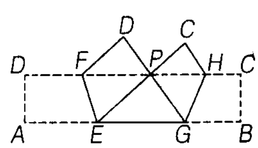
2008 年北京市中学生数学竞赛
初二年级试题解答

一、选择题（满分 25 分，每小题只有一个正确答案，答对得 5 分）

1. 自然数 a,b,c,d 满足 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}=1$，则 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^5}+\frac{1}{d^6}$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{8}$　(B) $\frac{3}{16}$　(C) $\frac{7}{32}$　(D) $\frac{15}{64}$

2. 如右图所示，$ABCD$ 是一张长方形纸片，将 AD、BC 折起，使 A、B 两点重合于 CD 边上的点 P，然后压平得折痕 EF 与 GH. 若 $PE=8\text{cm}$，$PG=6\text{cm}$，$EG=10\text{cm}$. 则长方形纸片 $ABCD$ 的面积为(　　).



(A) $105.6(\text{cm})^2$　(B) $110.4(\text{cm})^2$

(C) $115.2(\text{cm})^2$　(D) $124.8(\text{cm})^2$

3. 化简 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ 的结果是(　　).

(A) 1　(B) $\sqrt{3}$　(C) 2　(D) 4

4. $\triangle ABC$ 所在平面上的点 P，使得 $\triangle ABP$、$\triangle BCP$ 和 $\triangle ACP$ 的面积相等，这样的点 P 的个数是(　　).

(A) 8　(B) 4　(C) 3　(D) 1

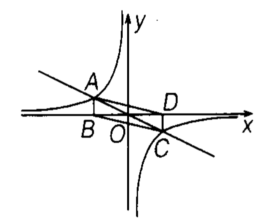
5. 在直角坐标系中，设点 $A(-1,-2)$，$B(4,-1)$，$C(m,0)$，$D(n,n)$ 为四边形的四个顶点，当四边形 $ABCD$ 的周长最短时，$\frac{m}{n}$ 的值为(　　).

(A) -2　(B) -1　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) 1

题号	1	2	3	4	5
答案	D	C	C	B	A

二、填空题（满分 35 分，每小题 7 分，将答案写在下面相应的空格中）

1. 如右图所示，过原点的直线与反比例函数 $y=-\frac{7}{x}$ 的图像交于点 A 和 C，自点 A 和点 C 作 x 轴的垂线，垂足分别为 B 和 D，则四边形 $ABCD$ 的面积等于________.



2. 方程组
$$\begin{cases}2x+y=z-1\\8x^3+y^3=z^2-1\end{cases}$$
的正整数解 (x,y,z) 为________.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=70^\circ$，$\angle CAB$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线相交于 I，若 $AC+AI=BC$，则 $\angle ACB$ 等于________度.

4. 已知 $A=\frac{1^2+2^2}{1\times2}+\frac{2^2+3^2}{2\times3}+\frac{3^2+4^2}{3\times4}+\cdots+\frac{1003^2+1004^2}{1003\times1004}+\frac{1004^2+1005^2}{1004\times1005}$，则 A 的整数部分是________.

5. 凸五边形 $ABCDE$ 中，$\angle BAE+\angle AED=270^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$，$AB=3$，$BC=12$，$CD=5$，$DE=4$，$AE=8$. 则五边形 $ABCDE$ 的面积等于________.

题号	1	2	3	4	5
答案	14	(1,3,6)	75°	2008	55.2

三、（满分 10 分）

已知 $\frac{x}{y+z+u}=\frac{y}{z+u+x}=\frac{z}{u+x+y}=\frac{u}{x+y+z}$，求 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}$ 的值.

解　由 $\frac{x}{y+z+u}=\frac{y}{z+u+x}=\frac{z}{u+x+y}=$

$\frac{u}{x+y+z}$，

则 $\frac{x+y+z+u}{y+z+u}=\frac{x+y+z+u}{z+u+x}=\frac{x+y+z+u}{u+x+y}=\frac{x+y+z+u}{x+y+z}$.

①如果分子 $x+y+z+u\neq0$，则由分母推得 $x=y=z=u$.

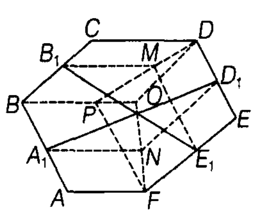
此时 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=1+1+1+1=4$.

②如果分子 $x+y+z+u=0$，

则 $x+y=-(z+u)$，$y+z=-(u+x)$，

此时 $\frac{x+y}{z+u}+\frac{y+z}{u+x}+\frac{z+u}{x+y}+\frac{u+x}{y+z}=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-4$.

四、（满分 15 分）如图，在六边形 $ABCDEF$ 中，$AB\parallel DE$，$BC\parallel EF$，$CD\parallel FA$，$AB+DE=BC+EF$，$A_1D_1=B_1E_1$，A_1、B_1、D_1、E_1 分别是 AB、BC、DE、EF 的中点. 求证：$\angle CDE=\angle AFE$.



证明 作▱$ABPF$，连接 DP，取 PD 的中点 M，$BCDP$ 是梯形. 连接 B_1M、E_1M，由梯形中位线定理，知 $B_1M\parallel CD\parallel BP\parallel AF$，$ME_1\parallel DE\parallel FP\parallel AB$，且 $B_1M=\frac{BP+CD}{2}=\frac{AF+CD}{2}$，$E_1M=\frac{PF+DE}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

同理，作▱$BCDO$，连接 OF，取 FO 的中点 N，连接 A_1N，D_1N，则由梯形中位线定理，知 $A_1N\parallel AF\parallel BO\parallel CD$，$ND_1\parallel EF\parallel OD\parallel BC$，且

$A_1N=\frac{AF+BO}{2}=\frac{AF+CD}{2}$，

$D_1N=\frac{EF+OD}{2}=\frac{EF+BC}{2}=\frac{AB+DE}{2}$.

在 $\triangle B_1ME_1$ 与 $\triangle A_1ND_1$ 中，$B_1M=A_1N$，$E_1M=D_1N$，

又因为 $A_1D_1=B_1E_1$，

所以 $\triangle B_1ME_1\cong\triangle A_1ND_1$.

因此 $\angle B_1ME_1=\angle A_1ND_1$，

所以 $\angle CDE=\angle AFE$.

五、（满分 15 分）求证：

(1)一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0，1，4，2.

(2) 对任意的正整数 n，$[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不被 7 整除. 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

证明 (1)设自然数 $m=7q+r$ $(r=0,1,2,3,4,5,6)$，则

$m^2=(7q+r)^2=49q^2+14qr+r^2$.

由于 r^2 只能取 0，1，4，9，16，25，36，被 7 除的余数对应为 0，1，4，2，2，4，1. 因此，一个自然数的平方被 7 除的余数只能是 0，1，4，2.

(2)由于 $n(n+2)(n+4)(n+6)=(n^2+6n)(n^2+6n+8)$，$(n=1,2,3\cdots\cdots)$，

令 $k=n^2+6n$，则

$n(n+2)(n+4)(n+6)=(n^2+6n)(n^2+6n+8)=k(k+8)$，其中 $k\geqslant7$.

则 $\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}=\sqrt{k(k+8)}=\sqrt{k^2+8k}$，其中 $k\geqslant7$.

由于 $k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16$，

所以 $(k+3)^2<k^2+8k<(k+4)^2$.

因此 $k+3<\sqrt{k^2+8k}<k+4$.

即 $[\sqrt{k^2+8k}]=k+3$.

也就是 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]=k+3=n^2+6n+3=(n+3)^2-6$.

如果 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 被 7 整除，必须只需 $(n+3)^2$ 被 7 除余 6，然而一个自然数的平方被 7 除的余数只能为 0，1，4 和 2 中的一个，因此对任意的正整数 n，$(n+3)^2-6$ 不能被 7 整除，也就是 $[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}]$ 不能被 7 整除.