

## 2007 年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 若  $a, b, c$  是 3 个不同的正整数, 并且  $abc = 16$ , 则  $a^b - b^c + c^a$  可能的最大值是 ( ).

(A) 249 (B) 253 (C) 263 (D) 264

2. 已知三个连续的正整数的倒数和等于  $\frac{191}{504}$ , 则这三个数之和等于 ( ).

(A) 27 (B) 24 (C) 21 (D) 18

3. 分母是 2 007 的 正的最简真分数有 ( ) 个.

(A) 675 (B) 1 326 (C) 1 329 (D) 1 332

4. 对于实数  $x$ , 符号  $[x]$  表示不大于  $x$

的最大整数, 例如,  $[3.14] = 3, [-7.59] = -8$ . 则关于  $x$  的方程  $\left[\frac{3x+7}{7}\right] = 4$  的整数根有 ( ) 个.

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

5. 如图 1, 已知长方形的长为 8, 宽为 4, 将长方形沿一条对角线折起压平. 则重叠部分(阴影三角形)的面积是 ( ).

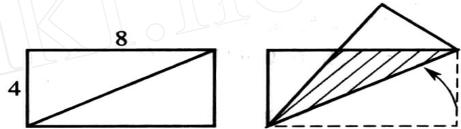


图 1

7.  $\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}-1, 1-2\sqrt{2}$ .

令  $x = \sqrt{2}y$ , 代入原方程得

$$6\sqrt{2}y^3 + 4\sqrt{2}y^2 - 17\sqrt{2}y + 18y - 6 + 5\sqrt{2} = 0.$$

易知  $y = \frac{1}{3}$  满足条件. 故  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . 于是,

$$3x^3 + 2\sqrt{2}x^2 - (17 - 9\sqrt{2})x - (6 - 5\sqrt{2})$$

$$= (x - \frac{\sqrt{2}}{3})(3x^2 + 3\sqrt{2}x + 9\sqrt{2} - 15).$$

$$= 3(x - \frac{\sqrt{2}}{3})(x - \sqrt{2} + 1)(x + 2\sqrt{2} - 1).$$

所以,  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_2 = \sqrt{2} - 1, x_3 = 1 - 2\sqrt{2}$ .

8.  $\frac{k-8}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{k(k-16)}$ .

设矩形的长、宽分别为  $a, b (a > b)$ .

则  $\frac{4(a+b)^2}{ab} = k$ , 即

$$4a^2 + (8-k)ab + 4b^2 = 0.$$

令  $t = \frac{a}{b}$ , 则  $4t^2 + (8-k)t + 4 = 0$ .

解得  $t = \frac{1}{8}[(k-8) + \sqrt{k(k-16)}]$ .

9.  $6\sqrt{223}$ .

设正方形边长  $a = \sqrt{2007}$ ,  $\angle DC = \dots$

则  $BD = 2, CD = a \tan \dots$

$BD = a(1 - \tan \dots)$ .

所以,  $BD E$  的周长为

$$a(1 - \tan \dots)(1 + \tan 2 \dots + \sec 2 \dots)$$

$$= a \frac{\cos \dots - \sin \dots}{\cos \dots} \frac{\cos 2 \dots + \sin 2 \dots + 1}{\cos 2 \dots}$$

$$= a \frac{\cos \dots - \sin \dots}{\cos \dots} \frac{2\cos^2 \dots + 2\sin \dots \cos \dots}{\cos^2 \dots - \sin^2 \dots}$$

$$= 2a = 6\sqrt{223}.$$

10. 20 或 119.

设  $x^2 + (x+1)^2 = v^2$ , 则  $(2x+1)^2 = 2v^2 - 1$ .

令  $u = 2x+1$ , 则  $u^2 - 2v^2 = -1$ . 其为佩尔方程, 其基本解为  $(u_0, v_0) = (1, 1)$ .

其全部正整数解可由

$$u_n + v_n \sqrt{2} = (u_0 + v_0 \sqrt{2})^{2n+1}$$

得到. 其中,  $(u_1, v_1) = (7, 5), (u_2, v_2) = (41, 29), (u_3, v_3) = (239, 169), u_4 > 400$ .

故  $x = 20$  或 119.

(夏兴国 提供)

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

二、填空题(每小题7分,共35分)

1. 将正整数从1开始依次按如图2所示的规律排成一个数阵,其中,2在第1个拐角处,3在第2个拐角处,5在第3个拐角处,7在第4个拐角处,.....那么,在第2007个拐角处的数是\_\_\_\_\_.

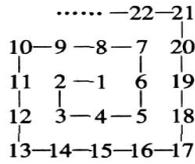


图2

2. 在一个  $3 \times 3$  的方格表中填有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九个数, 每格只填一个数. 现将每行中放有最大数的格子染成红色, 放有最小数的格子染成绿色. 设  $M$  是红格中的最小数,  $m$  是绿格中的最大数. 则  $M - m$  可以取到\_\_\_\_\_个不同的值.

3. 如图3, 已知在等腰  $ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $P, Q$  分别是边  $AC, AB$  上的点, 且  $AP = PQ = QB = BC$ . 则  $PCQ =$ \_\_\_\_\_.

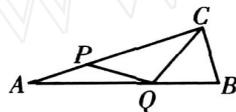


图3

4. 化简

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{c} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \left( 1 + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{d} \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \left( 1 + \frac{1}{b} \right) \left( 1 + \frac{1}{c} \right) - \left( 1 + \frac{1}{a} \right) \left( 1 + \frac{1}{b} \right) \left( 1 + \frac{1}{c} \right) \left( 1 + \frac{1}{d} \right)$$

的值为\_\_\_\_\_.

5. 如图4, 在长方形  $ABCD$  中,  $E, F, G$  分别是边  $AB, BC, CD$  的中点. 已知长方形  $ABCD$  的面积是  $40 \text{ cm}^2$ . 则四边形  $MFPN$  的面积是\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ .

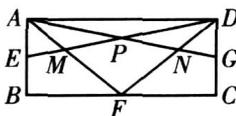


图4

三、(15分) 已知  $a, b, c$  是实数. 若

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

之和恰等于 1, 求证: 这三个分数的值有两个为 1, 一个为 -1.

四、(10分) 如图

5, 在  $ABC$  中,  $ABC = 46^\circ$ ,  $D$  是边  $BC$  上的一点,  $DC = AB$ ,  $DAB = 21^\circ$ . 试确定  $CAD$  的度数.

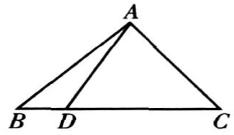


图5

五、(15分) 若对于任意  $n$  个连续正整数中, 总存在一个数的数字之和是 8 的倍数. 试确定  $n$  的最小值. 并说明理由.

参考答案

一、1. C.

由题设易知  $\{a, b, c\} = \{1, 2, 8\}$ .

且当  $b = 1, c = 2, a = 8$  时,  $a^b - b^c + c^a$  取最大值  $8 - 1 + 2^8 = 263$ .

2. B.

设此三个连续正整数为  $n - 1, n, n + 1$ .

则

$$\frac{191}{504} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3n^2 - 1}{n(n^2 - 1)}$$

即  $191n^3 - 1512n^2 - 191n + 504 = 0$ .

因式分解得  $(n - 8)(191n^2 + 16n - 63) = 0$ .

当  $n = 1$  时,  $191n^2 + 16n - 63 > 0$ . 故  $n = 8$ .

3. D.

因  $2007 = 3^2 \times 223$ , 所以, 比 2007 小的且与 2007 互质的正整数有

$$2007 - \left[ \frac{2007}{3} \right] - \left[ \frac{2007}{223} \right] + \left[ \frac{2007}{3 \times 223} \right] = 1332 \text{ (个)}$$

4. B.

由  $\left[ \frac{3x+7}{7} \right] = 4$ , 知  $4 \leq \frac{3x+7}{7} < 5$ , 得

$x < \frac{28}{3}$ . 故  $x = 7, 8, 9$ .

5. A.

如图6, 过  $E$  作  $EF \perp BD$  于  $F$ . 易知点  $F$  为  $BD$  中点.

又  $A, B, F, E$  四点共圆, 故

$$DE \cdot DA = DF \cdot DB,$$

即  $DE \cdot 8 = 2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} \Rightarrow DE = 5$ .

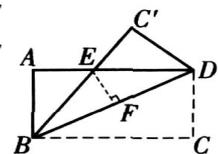


图6

故  $S_{BDE} = \frac{1}{2} DE \cdot AB = 10$ .

二、1. 1 008 017.

设第  $i$  个拐角处的数为  $a_i$ . 显然,

$$a_1 = 2, a_{2i} = a_{2i-1} + i,$$

$$a_{2i+1} = a_{2i} + (i+1).$$

因  $2\ 007 = 2 \times 1\ 003 + 1$ , 所以,

$$a_{2\ 007} = 1 + 2(1 + 2 + \dots + 1\ 003) + 1\ 004$$

$$= 1\ 004^2 + 1 = 1\ 008\ 017.$$

2. 8.

显然,  $3 \leq m, M \leq 7$ , 且  $m \leq M$ . 故

$$M - m \in \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}.$$

如图 7, 8 个值均可取到

7 9 8	6 9 8	5 9 8	5 9 8
6 5 4	7 5 4	7 6 4	7 6 1
3 2 1	3 2 1	3 2 1	4 3 2
$M=3, m=7$	$M=3, m=6$	$M=3, m=5$	$M=4, m=5$
9 8 5	9 6 5	9 6 4	9 6 3
7 4 2	8 4 2	8 5 2	8 4 2
6 3 1	7 3 1	7 3 1	7 5 1
$M=6, m=5$	$M=7, m=5$	$M=7, m=4$	$M=7, m=3$

图 7

3.  $30^\circ$ .

设  $A = 2$ , 则

$$\angle ABC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\angle BCQ = \angle BQC = 45^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$\angle PCQ = \angle ACB - \angle BCQ = 45^\circ - \frac{3\alpha}{2}.$$

又由  $(AP - 2\cos 2\alpha + BQ)2\sin \alpha = BC$ , 得

$$2\sin \alpha (2\cos 2\alpha + 1) = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin \alpha (3 - 4\sin^2 \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 10^\circ \text{ 或 } 50^\circ (\text{舍去}).$$

故  $\angle PCQ = 45^\circ - \frac{3\alpha}{2} = 30^\circ$ .

4. - 1.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) +$$

$$\frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

$$= -1 + \left(1 + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{b} \left(1 + \frac{1}{a}\right) +$$

$$\frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) +$$

$$\frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

$$= -1 + \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

5. 9.

联结  $FP$  并延长交  $AD$  于点  $Q$ , 显然, 点  $Q$  是  $AD$  的中点. 则

$$PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} AB, FP = \frac{3}{4} AB.$$

$$\text{所以, } MN = \frac{3}{5} BC.$$

$$\text{故 } S_{\text{四边形}MFNP} = \frac{1}{2} FP \cdot MN$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} S_{\text{长方形}ABCD} = 9.$$

三、由题设

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1,$$

$$\text{即 } \left\{ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1 \right\} + \left\{ \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 1 \right\} + \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 2bc}{2bc} \right\} + \left\{ \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 2ac}{2ac} \right\} +$$

$$\left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(b-c)^2 - a^2}{2bc} + \frac{(a-c)^2 - b^2}{2ac} +$$

$$\frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a(b-c+a)(b-c-a) + b(a-c+b)(a-c-b) +$$

$$c(a+b+c)(a+b-c)}{2abc} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b-c)(ab-ac-a^2+ab-bc-b^2+ac+bc+c^2)}{2abc} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b-c)(c^2 - (a-b)^2)}{2abc} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc} = 0.$$

所以,  $a+b-c=0$  或  $c+a-b=0$  或  $b+c-a=0$ .

(1) 若  $a + b - c = 0$ , 则

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - (b - c)^2}{2bc} = 1;$$

$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 + a^2 - (c - a)^2}{2ac} = 1;$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a + b)^2}{2ab} = -1.$$

(2) 若  $c + a - b = 0$ , 同理可得

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = -1,$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1.$$

(3) 若  $b + c - a = 0$ , 同理可得

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -1, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = 1,$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1.$$

综合(1)、(2)、(3)可得, 三个分数  $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 、 $\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ 、 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

的值有两个为1, 一个为-1.

四、如图8, 作  $ABD$  关于  $AD$  的轴对称图形  $AED$ , 则

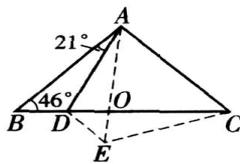


图8

$EAD = 21^\circ$ ,  
 $AE = AB$ .  
 所以,  $DE = BD$ .  
 易知

$$ADC = 21^\circ + 46^\circ = 67^\circ;$$

故  $ADE = ADB = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$ ,

$$CDE = 113^\circ - 67^\circ = 46^\circ.$$

联结  $CE$ .  
 因为  $DC = AB$ , 所以,  
 $CDE \cong ABD \cong AED$ .

设  $O$  为  $AE$  与  $DC$  的交点.  
 因为  $ODE = OED = 46^\circ$ , 于是,  
 $OD = OE$ .

又  $DC = AE$ , 则

$$AO = CO \Rightarrow OCA = OAC$$

$$\Rightarrow COE = 2 \angle ACO.$$

易知  $COE = 2 \times 46^\circ = 92^\circ$ .  
 因此,  $2 \angle ACO = COE = 92^\circ$ .

从而,  $\angle ACO = 46^\circ = \angle OAC$ .  
 所以,  $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = 67^\circ$ .

五、先证  $n = 14$  时, 题设的性质不成立.  
 当  $n = 14$  时, 对于

$$9\ 999\ 993, 9\ 999\ 994, \dots, 10\ 000\ 006$$

这14个连续整数, 任意一个数的数字之和均不能被8整除.

故  $n = 14$  时, 题设的性质不成立.

因此, 要使题设的性质成立, 应有  $n = 15$ .

再证  $n = 15$  时, 题设的性质成立.

设  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  为任意的连续15个正整数, 则这15个正整数中, 个位数字为0的整数最多有两个, 最少有一个, 可分为:

(1) 当  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  中个位数字为0的整数有两个时, 设  $a_i < a_j$ , 且  $a_i, a_j$  的个位数字为0, 则满足  $a_i, a_i + 1, \dots, a_i + 9, a_j$  为连续的11个整数, 其中,  $a_i, a_i + 1, \dots, a_i + 9$  无进位.

设  $n_i$  表示  $a_i$  各位数字之和, 则前10个数各位数字之和分别为  $n_i, n_i + 1, \dots, n_i + 9$ . 故这连续的10个数中至少有一个被8整除.

(2) 当  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  中个位数字为0的整数只有一个时(记为  $a_i$ ):

(i) 若整数  $i$  满足  $1 \leq i \leq 8$ , 则在  $a_i$  后面至少有7个连续整数. 于是,  $a_i, a_i + 1, \dots, a_i + 7$  这8个连续整数的各位数字和也为8个连续整数. 所以, 必有一个数能被8整除.

(ii) 若整数  $i$  满足  $9 \leq i \leq 15$ , 则在  $a_i$  前面至少有8个连续整数, 不妨设为  $a_{i-8}, a_{i-7}, \dots, a_{i-1}$ , 这8个连续整数的各位数字和也为8个连续整数. 所以, 必有一个数能被8整除.

综上所述, 对于任意15个连续整数中, 必有一个数, 其各位数字之和是8的倍数.

而小于15个的任意连续整数不成立此性质.

所以,  $n$  的最小值是15.

(李延林 提供)