初中数学竞赛求值题的解法分析

新疆石河子第五中学　邵俊安

【摘　要】求值题具有灵活多变的特点，是初中数学竞赛当中重要的组成部分，因其所占的分值比例较大，所以受到了初中数学学生及教师的重点关注。笔者结合实践工作经验，在本文中对初中数学竞赛当中的求值题的解题方法和技巧进行总结和分析，以期能够对学生在解该类题型时起到帮助。

【关键词】初中数学；竞赛；求值题；解法

因为求值题具有灵活多变的特点，所以说学生在对其进行解答的过程中需要较强的解答技巧，这对于初中生逻辑思维能力的锻炼有着很好的推动作用，所以其被广泛的应用到了初中数学竞赛当中。在对求值题进行解答过程中，如果采用按部就班的解题方法，那么解题过程是非常复杂和繁琐的，这些复杂和繁琐的解题步骤当中存在着大部分的“非必求成分”，即并不是一定要求出该步骤，才能够得出最后的答案，也就说这些“非必求成分”是可以省略和简化的，学生如果能够抓住这一特点，仔细分析题意，找出其中规律那么就能够将计算简化，并最终求得正确答案。

一、以“直接代入法”作为解题方法

“直接代入法”是求值题当中最为常见的一种解题方法，其解题原理是将题目当中所已知的字母的值带入到代数式当中，通过对代数式进行进一步化简，来求出所要求的值，该方法常用于较为简单的代数求值题当中。若在解题过程中能够已知代数式中所含字母的值，可尝试使用该方法对题目进行解答。

例题 1：设 $a=\sqrt[3]{3}$，b 是 a^2 的小数部分，则 $(b+2)^3$ 的值是 _____。（2013 年全国初中数学竞赛第 6 题）

解：已知 $a=\sqrt[3]{3}$，那么就可以求出 $1<a<2<a^2<3$，进而可知 $b=a^2-2=\sqrt[3]{9}-2$，进而求出 $(b+2)^3=(\sqrt[3]{9})^3=9$。

分析：解答该题的关键就在于“$a=\sqrt[3]{3}$”这一已知条件，根据这个已知条件就可以得出字母 a 的取值范围，然后再以此为基础进行余下步骤的解答。

二、以“整体代换法”作为解题方法

“整体代换法”是在“直接代入法”的基础上进行所研究出来的。其一般适用于已知代数式当中所含字母的值，但将字母的值带入到代数式中无法直接进行所求值的计算或计算起来较为麻烦，这时候就可以采取“整体代换法”来对其进行统一的代换，并求出最终的值。整体代换法是解决上述问题最有效的方法，利用“整体代换法”来对代数式值进行求解的关键，就在于可以根据题意需要对已知条件和所求值的代数式进行合理的变形，然后再进行整体的代入和求值即可。

例题 2：设 $a=\sqrt{7}-1$，则 $3a^3+12a^2-6a-12=$_____。（“《数学周报》杯”2011 年全国初中数学竞赛第 1 题）

A：24　B：25　C：$4\sqrt{7}+10$　D：$4\sqrt{7}+12$

解：由已知条件 $a=\sqrt{7}-1$ 可以计算出 $(a+1)^2=7$，进而求得 $a^2+2a=6$。将 $a^2+2a=6$ 带入到 $3a^3+12a^2-12=3a$ 当中，得出如下算式：

$(a^2+2a)+6a^2-6a-12$

$=6a^2+12a-12$

$=6\times6-12$

$=24$

故应选择 A 选项。

分析：解答该题的关键就在于“$a=\sqrt{7}-1$”这一已知条件，根据这个已知条件就可以得出 $a^2+2a=6$，然后再将 $a^2+2a=6$ 带入到代数式当中进行余下步骤的解答。

三、以“非负数性质”作为解题切入点

在初中阶段常见的非负数有 $|a|$、$a2^{2n}$、$\sqrt{a}$，如果几个非负数的和为 0，那么每一个非负数均为 0，非负数的这一性质使得在学生在解答部分竞赛代数求值题时有着重要的作用。也正因如此，利用非负数性质来对代数求值题进行解答也成为了非常常用的方法之一。

例题 3：已知非零实数 a、b 满足 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$ 则 a+b 等于 _____。（“《数学周报》杯”2009 年全国初中数学竞赛第 1 题）

A：-1　B：0　C：1　D：2

解：由二次根式中被开方数的非负数性质可知，$(a-3)b^2\geqslant0$，即 $a\geqslant3$。所以可以将 $|2a-4|$ 转化成为 $2a-4$，于是将 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$ 转变成为 $2a-4+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$，消项得出 $|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=0$，则有 $b+2=0$，$(a^3-)b^2=0$，解得 $b=-2$，$a=3$，最后得出 $a+b=1$，故应选择 C 选项。

分析：该题当中充分利用了二次根式中被开方数的非负数性质，在此基础上逐步的由简化繁，一步一步解答最后得出正确答案。

四、以“方程中根与系数的关系”作为解题关键

这里所说的方程是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，该方程的两个实数根为 x^1、x^2，那么 $x^1+x^2=-b/a$，$x^1\times x^2=c/a$，这就是一元二次方程根与系数的关系，利用这一关系可解决竞赛中一类代数式求值问题。

例题 4：设 $a^2+1=3a$，$b^2+1=3b$，且 $a\neq b$，则代数式 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 的值为 _____。（2012 年全国初中数学联赛四川（初三组）初赛第 2 题）

A：5　B：7　C：9　D：11

解：由已知 $a^2+1=3a$，$b^2+1=3b$，且 $a\neq b$，则 a、b 可以看作一元二次方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个实数根，由一元二次方程根与系数的关系，知 $a+b=3$，$ab=1$。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{(a+b)^2}{(ab)^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{(ab)^2}=\frac{3^2-2\times1}{1^2}=7;$$

故应选择 B 选项。

分析：该题型的关键就是一元二次方程根与系数的关系，利用这一关系可解决竞赛中一类代数式求值问题。

结论：

无论是在数学竞赛当中，还是平常测验和考试，求值题都是会经常出现的题型，出题者的出题目的就是为了能够以求值题为媒介，来锻炼学生的逻辑思维能力和数学解题的灵活性，从而提高学生的数学学习能力。在对求值题进行解答的过程中，学生需要做好以下三点：①充分理解题意，分析出各个条件之间的关系和用处，“取其精华去其糟粕”；②不要拘泥于传统的解题方法，要将思维发散出去，将自己的解题思路放的更广，从各个角度入手来尝试对习题进行解答；③控制好自己的解题状态，戒骄戒躁，避免因解题不顺而出现情绪起伏，从而对自己的解题思路造成影响。

【参考文献】

[1]王定成.建构二次方程模型巧解竞赛求值问题[J].中学生数学,2005,22:25-26.

[2]李芳菲.竞赛中代数式求值的九种常用方法[J].中学数学,2013,16:71-73.

[3]张洁.构造法在初中数学竞赛解题中的运用研究[D].湖南师范大学,2012.

初中数学竞赛求值题的解法分析

作者： 邵俊安
作者单位： 新疆石河子第五中学
刊名： 文理导航·教育研究与实践
英文刊名： A School Friend of English
年，卷(期)： 2013(11)

参考文献(3条)

1. 王定成 建构二次方程模型巧解竞赛求值问题 2005

2. 李芳菲 竞赛中代数式求值的九种常用方法 2013

3. 张洁 构造法在初中数学竞赛解题中的运用研究 2012