

2009我爱数学初中生夏令营数学竞赛

说明:第一试每小题 50分,共 150分;第二试每小题 15分,共 150分.

第一试

1. 当代数式

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (1-a)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-1)^2$$

的值达到最小时, $a+b+c+d$ 的值等于多少? 证明你的结论.

2. 已知 ABC 内接于半径为 1 的 $\odot O$, 并且 $AB \cdot AC = AB - AC = 1$. 试求 ABC 的三个内角的度数, 并证明你的结论.

3. 是否存在满足下列条件的正整数: 它的立方加上 101 所得的和恰是一个完全平方数? 证明你的结论.

第二试

1. 能使 $\left| \sqrt{\frac{n}{n+2009}} - 1 \right| > \frac{1}{1005}$ 成立的正整数 n 的值的个数等于_____.

2. 化简 $\sqrt[3]{10+7\sqrt{2}} + \sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}$ 所得的结果是_____.

3. 点 A, B 分别在张角为 60° 的一个角的两条边上, 并且它们相距 120 m. 若点 A 向该

角的顶点移动 72 m, 则点 A, B 的距离缩小 24 m. 那么, 点 A, B 原来到这个角的顶点的距离分别为_____、_____.

4. 已知

$$\frac{1}{1 \times \sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n \sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

的值大于 $\frac{19}{20}$, 小于 $\frac{20}{21}$. 则正整数 n 的最大值与最小值的差等于_____.

5. 已知关于 x 的方程

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + 6x + b = 0$$

的左边能被 $x-1$ 整除, 而被 $x+2$ 除所得的余式为 72. 则这个方程的所有解 (按从小到大的顺序) 是_____.

6. 如果两个正整数的差为 21, 最大公约数与最小公倍数的和为 1463, 那么, 这两个正整数是_____.

7. 设 AB, CD 是 $\odot O$ 的两条互相垂直的直径, E 为线段 OB 上的一点, 且 $OE = \frac{1}{n} BE$, 线段 CE 的延长线交 $\odot O$ 于点 F , 线段 AF 与 DO 交于点 G . 则 $\frac{DG}{GC} =$ _____.

$$\angle NKP = \angle NAP = \angle DAU_A = \angle BAC$$

又 $PK \perp AB$, 则 $NK \perp AC$. 故 $NK \parallel BD$.

同理, $LM \parallel BD$.

注意到 AKN 与 ABD 的位似中心为 A , O_A 与 U_A 是对应点, CML 与 CDB 的位似中心为 C , O_C 与 U_C 是对应点.

因为 $U_A U_C \parallel O_A O_C \parallel AC$, 所以, 两个位似变换的位似比相同. 记为

$$\lambda = \frac{AN}{AD} = \frac{AK}{AB} = \frac{AO_A}{AU_A} = \frac{CO_C}{CU_C} = \frac{CM}{CD} = \frac{CL}{CB}.$$

$$\text{于是, } \frac{DN}{DA} = \frac{DM}{DC} = \frac{BK}{BA} = \frac{BL}{BC} = 1 - \lambda.$$

因此, $KL \parallel AC \parallel MN$, 即四边形 $KLMN$ 是矩形.

7. 本届 MO 第 6 题.

8 已知 E 是圆内接四边形 $ABCD$ 的边 CD 的延长线上一点, I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 若 $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, $DE = DA$, 则 $\angle DEI$ 的度数是_____.

9 甲厂买来一台机器, 每天生产某种产品. 乙厂在若干天后, 也买来一台同样的机器, 开始以同样的速度生产同一种产品.

当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 6 倍时, 甲乙两厂恰好都生产了整数天, 此时, 各买一台同样的机器立刻投入生产; 当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 4 倍时, 甲乙两厂恰好都生产了整数天, 此时, 又各买两台同样的机器投入生产; 当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 2 倍时, 甲乙两厂恰好都生产了整数天, 此时, 甲厂生产该种产品的时间才四个多月.

如果甲厂第一天生产该种产品的日期是 2009 年 1 月 1 日, 并且每台机器天天都投入生产, 每台机器的生产效率不变, 那么, 甲厂生产的该种产品总数是乙厂的 2 倍时, 当天的日期是 2009 年_____月_____日.

10 设 n 是正整数. 如果在包含 2 009 在内的 $2n+1$ 个连续的自然数中, 前 $n+1$ 个数的平方和等于后 n 个数的平方和, 则 n 的值等于_____.

参考答案

第一试

1 按 a 降幂排列,

$$\text{原式} = 3a^2 - (2+2b)a + \dots$$

因此, 当原式的值达到最小时,

$$a = \frac{2+2b}{2 \times 3} = \frac{1+b}{3}.$$

同理, 当原式的值达到最小时, 分别有

$$d = \frac{1+c}{3}, b = \frac{a+c}{3}, c = \frac{d+b}{3}.$$

$$\text{联立解得 } b = c = \frac{1}{5}, a = d = \frac{2}{5}.$$

因此, 当原式的值达到最小时, $a+b+c+d$

的值等于 $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

$$2 \text{ 由 } AB+AC = \sqrt{(AB-AC)^2 + 4AB \cdot AC} = \sqrt{5},$$

$$\text{解得 } AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

在 OA 上取一点 D , 使 $OD = AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 则

$$AD = 1 - OD = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle CAD$ 中, 有

$$\angle OAC = \angle CAD, \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{AC}{OA}.$$

因此, $\triangle OAC \sim \triangle CAD$.

于是, $CD = AC = OD$,

$$\angle ACD = \angle AOC = \angle OCD,$$

$$\angle OAC = \angle OCA = 2\angle AOC.$$

$$\text{故 } 5\angle AOC = 180^\circ \Rightarrow \angle AOC = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 18^\circ.$$

在 AB 上取一点 E , 使 $AE = 1$, 则

$$EB = AB - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

在 $\triangle EBO$ 和 $\triangle OBA$ 中, 有

$$\angle EBO = \angle OBA, \frac{OB}{BE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{AB}{OB}.$$

故 $\triangle EBO \sim \triangle OBA$.

$$\text{于是, } BE = OE, OE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

因此, $\angle OAE = 36^\circ$, $\angle OBA = 36^\circ$;

$$\angle AOB = 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 108^\circ.$$

故 $\angle ACB = 54^\circ$ 或 126° , $\angle BAC = 108^\circ$ 或 36° .

所以, 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\angle ABC = 18^\circ, \angle ACB = 54^\circ, \angle BAC = 108^\circ$$

或 $\angle ABC = 18^\circ, \angle ACB = 126^\circ, \angle BAC = 36^\circ$.

3 若存在满足题设条件的正整数 x , 则

$$x^3 + 101 = y^2 \quad (y \in \mathbf{N}_+).$$

若 x 为偶数, 则 y 为奇数.

令 $x = 2n, y = 2m + 1 \quad (n, m \in \mathbf{N})$. 则

$$2n^3 + 25 = m^2 + m,$$

该式左边为奇数, 右边为偶数, 矛盾.

因此, x 为奇数, y 为偶数, 可令 $x=2n+1$, $y=2m$ ($n, m \in \mathbf{N}$). 则

$$\begin{aligned} (2n+1)^3 + 101 &= (2m)^2 \\ \Rightarrow 8n^3 + 12n^2 + 6n + 102 &= 4m^2 \\ \Rightarrow 4n^3 + 6n^2 + 3n + 51 &= 2m^2. \end{aligned}$$

而 $3n+51$ 是偶数, n 是奇数, 令 $n=2n_1-1$. 则 $x=4n_1-1$ ($n_1 \in \mathbf{N}_+$).

若 x 用 3 除所得的余数为 0, 则 y^2 用 3 除所得的余数为 2, 矛盾.

若 x 用 3 除所得的余数为 1, 则 y^2 用 3 除所得的余数为 0, y 用 3 除所得的余数为 0.

令 $x=3n+1, y=3m$ ($n, m \in \mathbf{N}$). 则 $3^3 n^3 + 3^3 n^2 + 3^2 n + 102 = 9m^2$.

各项除 102 外都是 9 的倍数, 矛盾.

因此, x 用 3 除后所得的余数为 2 可令 $x=3n-1$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

由式 可知 $x=12n-1$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

由于 y^2 的个位数字只可能是 0, 1, 4, 9, 6, 5, 不可能是 2, 3, 7, 8, 因此, 相应的 x^3 的个位数字不可能是 1, 2, 6, 7, 即

相应的 x 的个位数字不可能是 1, 3, 6, 8

由式, x 的最小可能值依次为 11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, ...

由结论, x 的最小可能值不可能是 11, 23, 71, 83.

因此, x 的最小可能值依次为 35, 47, 59, 95, ...

经检验, 当 $x=35, 47, 59$ 时, 都不符合题目要求.

若 $x=95$, 则

$$95^3 + 101 = 857\,375 + 101 = 857\,476 = 926^2,$$

它是完全平方数.

因此, 存在满足题设条件的正整数 95.

第二试

1. 1 008 015

$$\text{由 } 1 - \frac{n}{\sqrt{n+2009}} > \frac{1}{1005} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n+2009}} < \frac{1004}{1005}$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+2009} < \frac{1004^2}{1005^2}$$

$$\Rightarrow n < 1004^2 = 1\,008\,016$$

$$\text{因此, 能使 } \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2009}} - 1 \right| > \frac{1}{1005} \text{ 成}$$

立的正整数 n 的值的个数等于 1 008 015.

2. $2\sqrt[3]{4}$

令原式 $=x > 0$. 则

$$x^3 = 20 + 3\sqrt[3]{100-49} \times 2 \cdot x$$

$$\Rightarrow x^3 - 3\sqrt[3]{2} \cdot x - 20 = 0.$$

令 $x = \sqrt[3]{4}y > 0$. 则

$$4y^3 - 6y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (y-2)(2y^2 + 4y + 5) = 0.$$

解得 $y=2$

$$\text{故原式} = 2\sqrt[3]{4}.$$

3. $72 + 32\sqrt{3}$ m, $64\sqrt{3}$ m.

设该角的顶点为 C , 点 A 向该角的顶点移动 72 m 后到达的位置为点 D . 则

$$\angle BCA = 60^\circ, AB = 120, AD = 72,$$

$$BD = 120 - 24 = 96$$

由于 $72\,96\,120 = 3\,4\,5$, 则 $\angle ADB = 90^\circ$.

在 Rt BCD 中, 设 $CD = x$ 则 $BC = 2x$

$$\text{故 } (2x)^2 - x^2 = 96^2.$$

$$\text{解得 } x = 32\sqrt{3}, 2x = 64\sqrt{3}.$$

$$\text{故 } AC = 72 + 32\sqrt{3} \text{ m}, BC = 64\sqrt{3} \text{ m}.$$

4. 39.

注意到

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2 k - k^2(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k^2 + k} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

$$\text{则原式} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

由已知 $\frac{19}{20} < 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{20}{21}$, 有

$$20 < \sqrt{n+1} < 21 \Rightarrow 20^2 - 1 < n < 21^2 - 1.$$

故正整数 n 的最大值 $21^2 - 2$ 与最小值

20^2 的差等于 $21^2 - 20^2 - 2 = 41 - 2 = 39$.

5. -1, 1, 2, 4

由已知可得

$$\begin{cases} 1 - 6 + a + 6 + b = 0, \\ (-2)^4 - 6(-2)^3 + a(-2)^2 + 6(-2) + b = 72 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7, \\ b = -8 \end{cases}$$

故原方程为

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0,$$

即 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4) = 0$

这个方程的所有解(按从小到大的顺序)是 -1, 1, 2, 4

6. 112, 91.

设这两个正整数为 $x, y (x > y)$, 它们的最大公约数为 d , 且 $x = dx_1, y = dy_1$. 则它们的最小公倍数是 dx_1y_1 , 且

$$\begin{cases} d(x_1 - y_1) = 21, \\ d(1 + x_1y_1) = 1463 \end{cases}$$

由于 $(1463, 21) = 7$, 因此, $d = 1$ 或 7 .

若 $d = 1$, 则 $\begin{cases} x_1 - y_1 = 21, \\ x_1y_1 = 1463 \end{cases}$

故 $x_1 + y_1 = \sqrt{6289}$, 矛盾.

若 $d = 7$, 则 $\begin{cases} x_1 - y_1 = 3, \\ x_1y_1 = 208 \end{cases}$

故 $x_1 + y_1 = \sqrt{841} = 29$.

于是, $\begin{cases} x_1 = 16, \\ y_1 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 112, \\ y = 91. \end{cases}$

所以, 这两个正整数是 112, 91.

7. $\frac{1}{n+1}$.

设圆的半径为 $n+1$. 由已知得

$$OE = 1, CE = \sqrt{1^2 + (n+1)^2}.$$

联结 DF . 则 $\angle CFD = 90^\circ$.

故 $EOC \sim DFC \Rightarrow \frac{EC}{DC} = \frac{OC}{CF}$

$$\text{则 } CF = \frac{2(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}},$$

$$EF = CF - CE = \frac{(n+1)^2 - 1}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}.$$

作 $FH \perp BO$, 垂足为 H . 则

$$COE \sim FHE$$

$$\Rightarrow \frac{FH}{OC} = \frac{EH}{OE} = \frac{EF}{CE} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1}.$$

$$\text{故 } FH = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1} (n+1),$$

$$EH = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1}.$$

又 $AGO \sim AFH$, 则

$$\frac{OG}{AO} = \frac{FH}{AH} = \frac{\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1} (n+1)}{(n+1) + \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2 + 1}}$$

$$= \frac{n}{n+2},$$

$$OG = \frac{n(n+1)}{n+2}.$$

$$\text{故 } \frac{DG}{GC} = \frac{n+1 - \frac{n(n+1)}{n+2}}{n+1 + \frac{n(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{n+1}.$$

8. 25°

由已知可得

$$\angle BAC = 50^\circ, \angle EDA = \angle ABC = 70^\circ;$$

$$\angle DEA = \angle DAE = 55^\circ;$$

$$\angle CA = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC = 180^\circ - \angle CEA.$$

因此, C, A, E 四点共圆.

$$\text{所以, } \angle DEI = \angle CAI = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ.$$

9. 5月9日.

设当甲厂生产的产品总数是乙厂的6倍时, 甲厂生产了 x 天, 乙厂生产了 $\frac{x}{6}$ 天. 再过

y 天, 甲厂生产的产品总数是乙厂的4倍. 则

$$x + 2y = 4 \left(\frac{x}{6} + 2y \right),$$

即 $x = 18y$.

设又过 z 天, 甲厂生产的产品总数是乙厂的2倍. 则

$$x + 2y + 4z = 2 \left(\frac{x}{6} + 2y + 4z \right),$$

第六届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

1. 试求满足方程 $x^2 - 2xy + 126y^2 = 2009$ 的所有整数对 (x, y) . (张鹏程 供题)

2. 在凸五边形 $ABCDE$ 中, 已知 $AB = DE, BC = EA, AB \perp EA$, 且 B, C, D, E 四点共圆. 证明: A, B, C, D 四点共圆的充分必要条件是 $AC = AD$. (熊斌 供题)

3. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+, \sqrt{a} = x(y-z)^2, \sqrt{b} = y(z-x)^2, \sqrt{c} = z(x-y)^2$. 求证:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

(唐立华 供题)

4. 在一个圆周上给定十二个红点. 求 n 的最小值, 使得存在以红点为顶点的 n 个三角形, 满足以红点为端点的每条弦, 都是其中某个三角形的一条边. (陶平生 供题)

第二天

5. 设 $1, 2, \dots, 9$ 的所有排列 $X = (x_1, x_2, \dots, x_9)$ 的集合为 A . 对任意的 $X \in A$, 记

$$f(X) = x_1 + 2x_2 + \dots + 9x_9,$$

$$M = \{f(X) \mid X \in A\}.$$

求 $|M|$ ($|M|$ 表示集合 M 的元素个数).

(熊斌 供题)

6. 如图 1, 已知 $\odot O, \odot I$ 分别是 ABC 的外接圆、内切圆. 证明: 过 $\odot O$ 上的任意一点 D , 都可以作一个 DEF , 使得 $\odot O, \odot I$ 分别是 DEF 的外接圆、内切圆. (陶平生 供题)

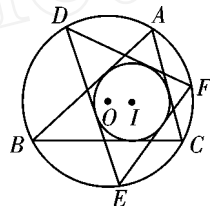


图 1

即 $\frac{2}{3}x = 2y + 4z$

由式得

$$5y = 2z$$

故 y 是 2 的倍数.

令 $y = 2n (n \in \mathbf{N}_+)$. 则

$$x + y + z = 18y + y + \frac{5}{2}y = 43n.$$

由已知得

$$120 = 31 + 28 + 31 + 30$$

$$43n = 31 + 28 + 31 + 30 + 31 = 151.$$

因此, $x + y + z = 43n = 129$.

所以, $129 - 31 - 28 - 31 - 30 = 9$.

于是, 当甲厂生产的产品总数是乙厂的 2 倍时, 当天的日期是 2009 年 5 月 9 日.

10. 31.

设 $m, m+1, \dots, m+2n$ 是满足上述条件的 $2n+1$ 个连续的自然数. 则

$$\begin{aligned} m^2 + (m+1)^2 + \dots + (m+n)^2 \\ = (m+n+1)^2 + (m+n+2)^2 + \dots + (m+2n)^2. \end{aligned}$$

令 $S_k = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2$. 则

$$S_{m+n} - S_{m-1} = S_{m+2n} - S_{m+n}.$$

代入化简得 $2mn^2 + 2n^3 - m^2 + n^2 = 0$, 即

$$m = 2n^2 + n.$$

又 $m = 2009 = m + 2n$, 则

$$2n^2 + n = 2009 = 2n^2 + 3n.$$

因此, $n = 31$.

(夏兴国 提供)