2005 年全国初中数学联赛决赛试卷

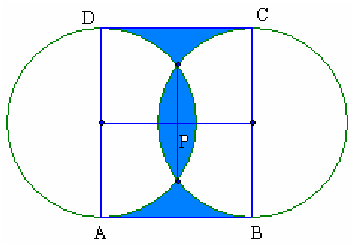
一、选择题：(每题 7 分，共 42 分)

1、化简：$\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$ 的结果是____。

A、无理数　B、真分数　C、奇数　D、偶数

2、圆内接四条边长顺次为 5、10、11、14；则这个四边形的面积为____。

A、78.5　B、97.5　C、90　D、102



3、设 $r\geq 4$，$a=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+1}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}$，

$c=\dfrac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$，则下列各式一定成立的是____。

A、$a>b>c$　B、$b>c>a$　C、$c>a>b$　D、$c>b>a$

4、图中的三块阴影部分由两个半径为 1 的圆及其外公切线分割而成，如果中间一块阴影的面积等于上下两块面积之和，则这两圆的公共弦长是____。

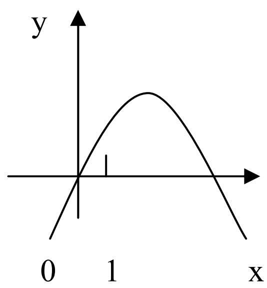
A、$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　B、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　C、$\dfrac{1}{2}\sqrt{25-\pi^2}$　D、$\dfrac{1}{2}\sqrt{16-\pi^2}$

5、已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，

记 $p=|a-b+c|+|2a+b|$，$q=|a+b+c|+|2a-b|$，则____。

A、$p>q$　　B、$p=q$

C、$p<q$　　D、p、q 大小关系不能确定



6、若 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 为互不相等的正奇数，满足 $(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)(2005-x_4)(2005-x_5)=24^2$，则 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 的未位数字是____。

A、1　B、3　C、5　D、7

二、填空题(共 28 分)

1、不超过 100 的自然数中，将凡是 3 或 5 的倍数的数相加，其和为____。

2、$\sqrt{7x^2+9x+13}+\sqrt{7x^2-5x+13}=7x$，则 $x=$______。

3、若实数 x、y 满足$\frac{x}{3^3+4^3}+\frac{y}{3^3+6^3}=1$, $\frac{x}{5^3+4^3}+\frac{y}{5^3+6^3}=1$, 则 x＋y＝____。

4、已知锐角三角形 ABC 的三个内角 A、B、C 满足：A＞B＞C，用 a 表示 A-B，B-C 以及 90°- A 中的最小者，则 a 的最大值为______。

三、解答题(第 1 题 20 分，第 2、3 题各 25 分)

A 卷

1、a、b、c为实数，ac＜0，且$\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$，证明：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有大于$\frac{3}{4}$而小于 1 的根。

2、锐角 ΔABC 中，AB＞AC，CD、BE 分别是 AB、AC 边上的高，过 D 作 BC 的垂线交 BE 于 F，交 CA 的延长线于 P，过 E 作 BC 的垂线，交 CD 于 G，交 BA 的延长线于 Q，证明：BC、DE、FG、PQ 四条直线相交于一点。

3、a、b、c为正整数，且$a^2+b^3=c^4$，求c的最小值。

B 卷

1. 已知a、b、c为实数，ac<0，且$\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$. 证明：一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有大于$\sqrt{\frac{3}{5}}$而小于 1 的根.

2．在锐角△ABC 中，AB> AC，CD、BE 分别是边 AB、AC 上的高，DE 与 BC 的延长线交于点 T，过点 D 作 BC 的垂线交 BE 于点 F，过点 E 作 BC 的垂线交 CD 于点 G．证明：F、G、T 三点共线.

3．设a、b、c为正整数，且$a^2+b^3=c^4$.求c的最小值.

C 卷

1．同 A 卷第 1 题

2．同 A 卷第 2 题.

3．在和式$0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2$中，允许将其中的某些“+”号改成“-”号，如果所得到的代数和为 n，就称数 n 是“可表出的”．试问，在前 10 个正整数 1，2，3，…，10 中，哪些数是可表出的？说明理由.

2005年全国初中数学联赛决赛试卷答案

一、选择题：

1、D

$$\frac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\frac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}=\frac{1}{4+\sqrt{50+2\sqrt{450}+9}}+\frac{1}{3-\sqrt{50-2\sqrt{800}+16}}$$

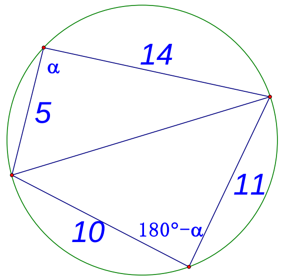
$$=\frac{1}{4+5\sqrt{2}+3}+\frac{1}{3-5\sqrt{2}+4}=\frac{1}{7+5\sqrt{2}}+\frac{1}{7-5\sqrt{2}}=\frac{7-5\sqrt{2}+7+5\sqrt{2}}{49-50}=-14$$

2、C

由题意得：$5^2+14^2-2\times5\times14\times\cos\alpha=10^2+11^2-2\times10\times11\times\cos(180°-\alpha)$

∴ $221-140\cos\alpha=221+220\cos\alpha$，∴ $\cos\alpha=0$，∴ $\alpha=90°$

∴四边形的面积为：$5\times7+5\times11=90$



3、D

解法1：用特值法，取r=4，则有

$a=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$，$b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{5-2\sqrt{5}}{10}=\frac{2\left(5-2\sqrt{5}\right)}{20}\approx\frac{1.036}{20}$，

$c=\frac{1}{4(2+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-2}{4}=\frac{5\left(\sqrt{5}-2\right)}{20}\approx\frac{1.18}{20}$，∴c>b>a.

解法2：$a=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}=\frac{1}{r\left(r+1\right)}$，

$$b=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{\sqrt{r\left(r+1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{r\left(r+1\right)}\left(\sqrt{r+1}+\sqrt{r}\right)},\ c=\frac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$$

$$\because r\geq4,\quad \therefore r(r+1)-\sqrt{r(r+1)}(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})=\sqrt{r(r+1)}[\sqrt{r(r+1)}-\sqrt{r+1}-\sqrt{r}]$$

$$=\sqrt{r(r+1)}[(\sqrt{r}-1)(\sqrt{r+1}-1)-1]>0$$

$\therefore r(r+1)>\sqrt{r(r+1)}(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})$，故 a<b.

又 $\therefore\sqrt{r(r+1)}(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})-r(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})=(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})(\sqrt{r(r+1)}-r)>0$

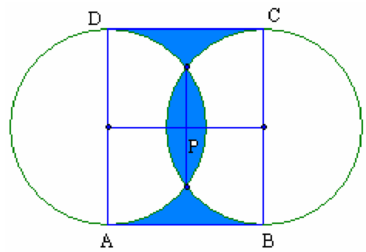
$\therefore\sqrt{r(r+1)}(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})>r(\sqrt{r+1}+\sqrt{r})$，故 b<c，综上所述：a<b<c

解法 3：∵r≥4　∴$\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r+1}}$＜1

$$\therefore a=\left(\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}\right)<\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=b$$

c＝$\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{r}>\frac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{\sqrt{r}\sqrt{r+1}}=\frac{1}{\sqrt{r}}-\frac{1}{\sqrt{r+1}}=b$，　∴a<b<c.

4、D



由图形割补知圆面积等于矩形 ABCD 的面积

$$\therefore \pi\cdot 1^2=2AB,\therefore AB=\frac{\pi}{2}$$

由垂径定理得公共弦为

$$2\sqrt{1^2-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{4}=\frac{\sqrt{16-\pi^2}}{2}$$

5、C

由题意得：a<0，b>0，c=0, ∴p＝|a－b|＋|2a＋b|，q＝|a＋b|＋|2a－b|

$$\text{又}-\frac{b}{2a}>1,\therefore -b<2a,\therefore 2a+b>0,\text{从而}a+b>-a>0$$

∴p＝|a－b|＋|2a＋b|＝b-a+2a+b=a+2b=2b+a，
q＝|a＋b|＋|2a－b|= a＋b＋b-2a=2b-a,　∴p<q.

6、A

因为x_1，x_2，x_3，x_4，x_5为互不相等的正奇数，所以$(2005-x_1)$、$(2005-x_2)$、$(2005-x_3)$、$(2005-x_4)$、$(2005-x_5)$为互不相等的偶数

而将 24^2分解为 5 个互不相等的偶数之积，只有唯一的形式：$24^2=2\cdot(-2)\cdot4\cdot6\cdot(-6)$

所以$(2005-x_1)$、$(2005-x_2)$、$(2005-x_3)$、$(2005-x_4)$、$(2005-x_5)$分别等于2、(-2)、4、6、(-6)

所以$(2005-x_1)^2+(2005-x_2)^2+(2005-x_3)^2+(2005-x_4)^2+(2005-x_5)^2=2^2+(-2)^2+4^2+6^2+(-6)^2=96$

展开得：$5\cdot2005^2-4010\left(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\right)+\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)=96$

$$\therefore x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=96-5\cdot2005^2+4010(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\equiv1(\mathrm{mod}10).$$

二、填空题

1、2418

(3×1＋3×2＋……3×33)＋(5×1＋5×2＋……5×20)－(15×1＋15×2＋……15×6)＝1683＋1050－315＝2418

2、$\frac{12}{7}$

分子有理化得：$\frac{14x}{\sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}}=7x$，

∵x≠0，∴$\sqrt{7x^2+9x+13}-\sqrt{7x^2-5x+13}=2$，即$\sqrt{7x^2+9x+13}=\sqrt{7x^2-5x+13}+2$

两边平方化简得：$7x-2=2\sqrt{7x^2-5x+13}$

再平方化简得：$21x^2-8x-48=0$，解之得$x=\frac{12}{7}$或$x=-\frac{4}{3}$(舍去)

3、432

解法 1：假设 x＋y＝a，则 y＝a－x

$$\therefore\left(3^3+6^3\right)x+\left(3^3+4^3\right)(a-x)=\left(3^3+6^3\right)\left(3^3+4^3\right),$$

$$\text{即}\left(6^3-4^3\right)x+\left(3^3+4^3\right)a=\left(3^3\right)^2+3^3\cdot4^3+3^3\cdot6^3+4^3\cdot6^3\qquad(1)$$

$$\therefore\left(5^3+6^3\right)x+\left(5^3+4^3\right)(a-x)=\left(5^3+6^3\right)\left(5^3+4^3\right),$$

$$\text{即}\left(6^3-4^3\right)x+\left(5^3+4^3\right)a=\left(5^3\right)^2+5^3\cdot4^3+5^3\cdot6^3+4^3\cdot6^3\qquad(2)$$

$(2)-(1)$得：

$$\left(5^3-3^3\right)a=\left(5^3\right)^2-\left(3^3\right)^2+\left(5^3-3^3\right)\cdot4^3+\left(5^3-3^3\right)\cdot6^3$$

$$\therefore a=3^3+4^3+5^3+6^3=432$$

解法 2：易知3^3、5^3是关于t的方程$\frac{x}{t+4^3}+\frac{y}{t+6^3}=1$的两根

化简得：$t^2-\left(x+y-4^3-6^3\right)t-\left(6^3x+4^3y-4^3\cdot6^3\right)=0$

由韦达定理得:$3^3+5^3=x+y-4^3-6^3$

$\therefore\qquad x+y=3^3+4^3+5^3+6^3=432$

4、15º

解：∵　$\alpha=\min\left\{A-B,B-C,90^\circ-A\right\}$

$\therefore \quad \alpha \le A-B, \alpha \le B-C, \alpha \le 90° - A$

$\therefore \quad 6\alpha \le 2(A-B)+(B-C)+3(90°-A)$

$\quad\quad = 270° - (A+B+C) = 90°$

$\therefore \quad \alpha \le 15°$

另一方面，当$A-B=B-C=90°-A=15°$时，

有$A=75°, B=60°, C=45°$满足题设条件，故

α可取得最大值$15°$

三、解答题(第 **1** 题 **20** 分，第 **2**、**3** 题各 **25** 分)

1. (A 卷) 解：设 $f(x)=ax^2+bx+c$， 则

$$f(\frac{3}{4})f(1)=(\frac{9}{16}a+\frac{3}{4}b+c)(a+b+c)=\frac{1}{16}(9a+12b+16c)(a+b+c)$$

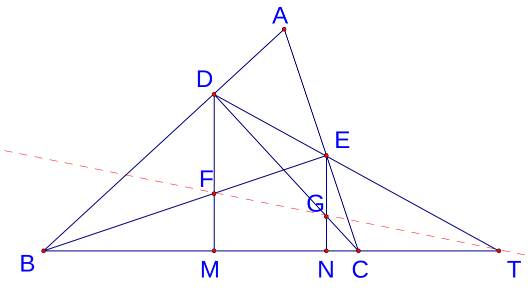
$\because \sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0, \therefore b=\dfrac{-\sqrt{6}a-\sqrt{15}c}{3}$

$$\therefore (9a+12b+16c)(a+b+c)=\left(9a-4\sqrt{6}a-4\sqrt{15}c+16c\right)\left(a-\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{15}}{3}c+c\right)$$

$$=\left[\left(\sqrt{81}-\sqrt{96}\right)a+\left(\sqrt{256}-\sqrt{240}\right)c\right]\left[\frac{3-\sqrt{6}}{3}a+\frac{3-\sqrt{15}}{3}c\right]$$

$$=c^2\left[\left(\sqrt{81}-\sqrt{96}\right)\frac{a}{c}+\left(\sqrt{256}-\sqrt{240}\right)\right]\left[\frac{3-\sqrt{6}}{3}\frac{a}{c}+\frac{3-\sqrt{15}}{3}\right]<0$$

$\therefore f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot f(1)<0$ $\therefore$一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ 有大于$\frac{3}{4}$而小于 1 的根.



2．(B卷)　证法 1：设过D、E的垂线分别交BC于M、N，在Rt△BEC 与Rt△BDC中，由射影定理得：CE^2＝CN·CB，BD^2＝BM·BC，$\therefore \dfrac{CN}{BM}=\dfrac{CE^2}{BD^2}$

又 Rt△CNG ∽Rt△DCB，Rt△BMF ∽Rt△BEC，

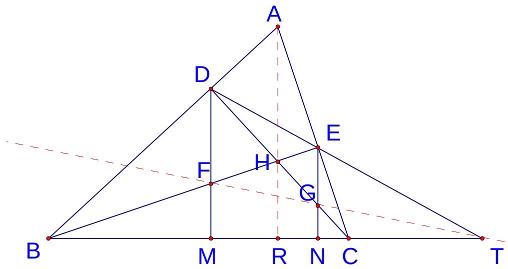
$$\therefore GN=\frac{BD}{CD}\cdot CN, FM=\frac{CE}{BE}\cdot BM$$

$$\therefore \frac{GN}{FM}=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CN}{BM}=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CE^2}{BD^2}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}(1)$$

在 Rt△BEC 与 Rt△BDC 中，由面积关系得：BE·CE＝EN·BC，BD·CD＝DM·BC

$$\therefore \frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}=\frac{EN}{DM}=\frac{TN}{TM}(2)$$

由(1)(2)得：$\frac{GN}{FM}=\frac{TN}{TM}$，又 GN⊥FM，故 F、G、T 共线。

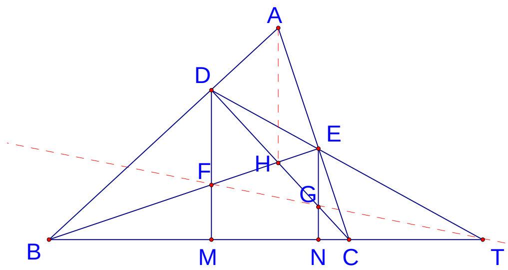


证法 2：设 CD、BE 相交于点 H，则 H 为△ABC 的垂心，记 DF、EG、AH 与 BC 的交点分别为 M、N、R

∵DM∥AR∥EN，∴ $\frac{DF}{FM}=\frac{AH}{HR}=\frac{EG}{GN}$

由合比定理得：

$$\frac{DM}{FM}=\frac{EN}{GN},\therefore \frac{GN}{FM}=\frac{EN}{DM}=\frac{TN}{TM},\text{故}F\text{、}G\text{、}T\text{三点共线.}$$



证法 3：在△ABC 中，直线 DET 分别交 BC、CA、AB 于 T、E、D，由梅涅劳斯定理得：

$$\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=1 \qquad (1)$$

设 CD、BE 相交于点 H，则 H 为△ABC 的垂心，AH⊥BC

∵DF⊥BC、EG⊥BC， ∴AH ∥DF ∥EG

$$\therefore \frac{CE}{EA}=\frac{CG}{GH},\frac{AD}{DB}=\frac{HF}{FB},\text{代入}(1)\text{得}\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CG}{GH}\cdot\frac{HF}{FB}=1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理得：F、G、T 三点共线.

证法 4：连结 FT 交 EN 于 G’，易知：$\dfrac{DF}{FM}=\dfrac{EG'}{G'N}$

为了证明 F、G、T 三点共线，只需证明$\dfrac{DF}{FM}=\dfrac{EG}{GN}$即可

$$\because \frac{DF}{FM}=\frac{S_{\Delta BDF}}{S_{\Delta BMF}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot BF\sin\angle ABE}{\frac{1}{2}BM\cdot BF\sin\angle CBE}=\frac{BD}{BM}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE}$$

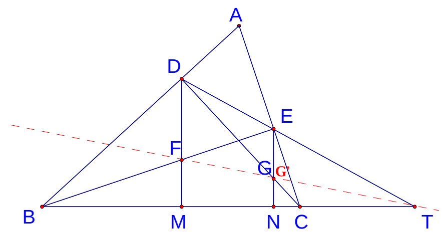
$$\frac{EG}{GN}=\frac{S_{\Delta CEG}}{S_{\Delta CMG}}=\frac{\frac{1}{2}CE\cdot CG\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}CN\cdot CG\sin\angle BCD}=\frac{CE}{CN}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$$

又$\dfrac{BD}{BM}=\dfrac{BC}{BD},\dfrac{CE}{CN}=\dfrac{BC}{CE}\ \therefore\ \dfrac{DF}{FM}=\dfrac{BC\sin\angle ABE}{BD\sin\angle CBE},\dfrac{EG}{GN}=\dfrac{BC\sin\angle ACD}{CE\sin\angle BCD}$　　(1)

∵CD⊥AB、BE⊥CA，

∴B、D、E、C 四点共圆

∴∠ABE＝∠ACD　　(2)



$$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=BC=\frac{CE}{\sin\angle CBE},\therefore BD\sin\angle CBE=CE\sin\angle BCD\quad(3)$$

将(2) (3)代入（1）得：$\dfrac{DF}{FM}=\dfrac{EG}{GN}$，故 F、G、T 三点共线.

3、(A卷)解：显然c＞1.由题设得：$(c^2-a)(c^2+a)=b^3$,若取$\begin{cases}c^2-a=b\\c^2+a=b^2\end{cases}$,则$c^2=\dfrac{b(b+1)}{2}$

由大到小考察b，使$\dfrac{b(b+1)}{2}$为完全平方数，易知当b＝8 时，c^2＝36，则c=6，从而a=28。下面说明c没有比 6 更小的正整数解，列表如下：

c	c^4	$x^3(x^3<c^4)$	c^4-x^3
2	16	1,8	17,8
3	81	1,8,27,64	80,73,54,17
4	256	1,8,27,64,125,216	255,248,229,192,131,40
5	625	1,8,27,64,125,216,343,512	624,617,598,561,500,409,282,113

显然，表中c^4-x^3的值均不是完全平方数。故c的最小值为 6.

A　卷

三、解答题

1. 由条件得$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}b+c=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a$. 记 $y=ax^2+bx+c$.

当 $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$时,有 $y_1=\frac{3}{5}a+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}b+c=\frac{3-\sqrt{10}}{5}a$. ①

当 $x=1$ 时,有 $y_2=a+b+c=a+b+c-\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c)=\frac{a}{\sqrt{3}}[(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\frac{c}{a}(\sqrt{5}-\sqrt{3})]$. ②

由于 $3-\sqrt{10}<0$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$, $\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$, $-\frac{c}{a}>0$,则

$$y_1y_2=\frac{3-\sqrt{10}}{5\sqrt{3}}[(\sqrt{3}-\sqrt{2})a^2-\frac{c}{a}(\sqrt{5}-\sqrt{3})a^2]<0.$$

因此,方程必有一根介于$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$与 1 之间,而$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}>\frac{3}{4}$,故方程有大于$\frac{3}{4}$而小于 1 的根.

2. ***证法 1**:如图 1,由 $AB>AC$,知 DE 与 BC 的延长线必相交,设交点为 T. 设过 D、E 的垂线分别交 BC 于 M、N,则 $CN\cdot CB=CE^2$, $BM\cdot BC=BD^2$.

故$\frac{CN}{BM}=\frac{CE^2}{BD^2}$.

而 $GN=\frac{BD}{CD}\cdot CN$, $FM=\frac{CE}{BE}\cdot BM$,

故$\frac{GN}{FM}=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CN}{BM}$

$=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CE^2}{BD^2}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$. ①

又因 $BE\cdot CE=EN\cdot BC$, $BD\cdot CD=DM\cdot BC$,所以,

$\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}=\frac{EN}{DM}=\frac{TN}{TM}$. ②

由①、②得$\frac{GN}{FM}=\frac{TN}{TM}$.

因此,F、G、T 三点共线.

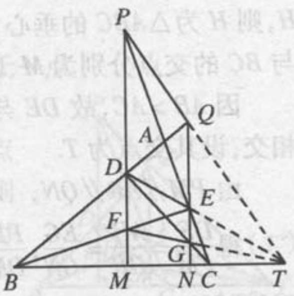


图 1

由$\dfrac{QN}{BN}=\dfrac{CD}{BD}$，$BN\cdot BC=BE^2$ 相乘得 $QN\cdot BC=\dfrac{BE^2\cdot CD}{BD}$.

又$\dfrac{PM}{CM}=\dfrac{BE}{CE}$，$CM\cdot BC=CD^2$ 相乘得 $PM\cdot BC=\dfrac{CD^2\cdot BE}{CE}$两式相除得$\dfrac{QN}{PM}=\dfrac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}$. ③

由②、③得$\dfrac{QN}{PM}=\dfrac{TN}{TM}$.

故 P、Q、T 三点共线，即 BC、DE、FG、PQ 四条直线都过点 P，亦即这四条直线相交于一点.

***证法 2**：如图 2，设 CD、BE 相交于点 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，并记 DF、EG、AH 与 BC 的交点分别为 M、N、R.

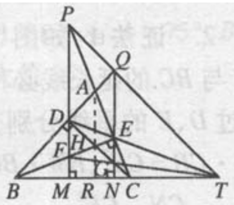


图 2

因 $AB>AC$，故 DE 与 BC 的延长线必相交，设其交点为 T.

由 $PM/\!/AR/\!/QN$，

得$\dfrac{DF}{FM}=\dfrac{AH}{HR}=\dfrac{EG}{GN}$，$\dfrac{PD}{DM}=\dfrac{AH}{HR}=\dfrac{QE}{EN}$. 由合比定理，得$\dfrac{DM}{FM}=\dfrac{EN}{GN}$，$\dfrac{PM}{DM}=\dfrac{QN}{EN}$.

所以，有$\dfrac{GN}{FM}=\dfrac{EN}{DM}=\dfrac{TN}{TM}$，$\dfrac{PM}{QN}=\dfrac{DM}{EN}=\dfrac{TM}{TN}$.

故 F、G、T 及 P、Q、T 三点均共线，所以说，BC、DE、FG、PQ 四条直线相交于一点.

证法 3：如图 3，设 CD、BE 相交于点 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，则 $AH\perp BC$. 因 $AB>AC$，故 DE 与 BC 的延长线必相交，设其交点为 T. 分别对 $\triangle ABC$ 和直线 DET，$\triangle HBC$ 和直线 DET 应用梅涅劳斯定理，

得$\dfrac{BT}{TC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$，$\dfrac{BT}{TC}\cdot\dfrac{CD}{DH}\cdot\dfrac{HE}{EB}=1$.

由于 $DF\perp BC$，$EG\perp BC$，

$\therefore$ $PE/\!/AH/\!/QG$，

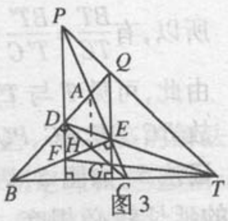


图 3

$\therefore$ $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{CG}{GH}$，$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{HF}{FB}$，

$\dfrac{CD}{DH}=\dfrac{CD}{PA}$，$\dfrac{HE}{EB}=\dfrac{AQ}{QB}$.

于是，有$\dfrac{BT}{TC}\cdot\dfrac{CG}{GH}\cdot\dfrac{HF}{FB}=1$，$\dfrac{BT}{TC}\cdot\dfrac{CP}{PA}\cdot\dfrac{AQ}{QB}=1$.

故由梅涅劳斯定理的逆定理知有：F、G、T 及 P、Q、T 三点均共线.

所以 BC、DE、FG、PQ 四条直线相交于一点.

证法 4：如图 4，因 $AB > AC$，故 DE、FG、PQ 均与 BC 的延长线相交，设其交点依次为 T、T'、T''，设 CD、BE 相交于点 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 垂心，连接 AH，则分别对 $\triangle ABC$ 和直线 DE，$\triangle HBC$ 和直线 FG，$\triangle ABC$ 和直线 PQ，$\triangle HBC$ 和直线 DE 应用梅涅劳斯定理，得

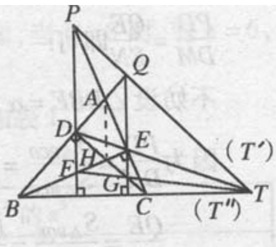


图 4

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,$$

$$\frac{HF}{FB}\cdot\frac{BT'}{T'C}\cdot\frac{CG}{GH}=1,$$

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BT''}{T''C'}\cdot\frac{CP}{PA}=1,$$

$$\frac{HE}{EB}\cdot\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CD}{DH}=1.$$

由 $DF /\!/ AH /\!/ EG$，可得

$$\frac{AD}{DB}=\frac{HF}{FB},\frac{CE}{EA}=\frac{CG}{GH};$$

由 $PF /\!/ AH /\!/ QG$，可得

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{HE}{EB},\frac{CP}{PA}=\frac{CD}{DH},$$

所以，有 $\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{BT'}{T'C}=\dfrac{BT''}{T''C}$.

由此，可见 T 与 T'、T'' 三点必重合.

故 BC、DE、FG、PQ 四条直线相交于一点.

证法5：如图5，因 $AB > AC$，故 DE 与 BC 的延长线必相交，设其交点为 T，并记 DF、EG 分别与 BC 相交于点 M、N.

连接 PT 交 NE 的延长线于点 Q'，易知有 $\frac{PD}{DM}=\frac{Q'E}{EN}$.

为了证明 P、Q、T 三点共线，只需证 $\frac{PD}{DM}=\frac{QE}{EN}$ 即可.

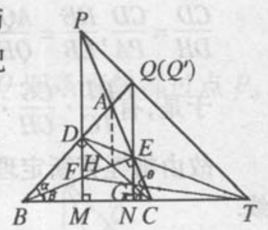


图5

不妨设 $\angle DBE=\alpha$，$\angle CBE=\beta$，$\angle DCE=\theta$，$\angle BCD=\gamma$.

因为 $\frac{PD}{DM}=\frac{S_{\triangle PCD}}{S_{\triangle MCD}}=\frac{PC}{MC}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$，

$\frac{QE}{EN}=\frac{S_{\triangle BQE}}{S_{\triangle BNE}}=\frac{BQ}{BN}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

由于 $\mathrm{Rt}\triangle PCM\backsim\mathrm{Rt}\triangle BCE$，得 $\frac{PC}{MC}=\frac{BC}{EC}$，

$\mathrm{Rt}\triangle BQN\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBD$，得 $\frac{BQ}{BN}=\frac{BC}{BD}$.

$\therefore\quad \frac{PD}{DM}=\frac{BC}{EC}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$，$\frac{QE}{EN}=\frac{BC}{BD}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

由于 $DM\perp BC$，$EN\perp BC$，可知 B、D、E、C 四点共圆，所以 $\angle\alpha=\angle\theta$.

又 $\frac{CE}{\sin\beta}=BC=\frac{BD}{\sin\gamma}$，

$\therefore\quad BD\cdot\sin\beta=CE\cdot\sin\gamma$.

因此，有 $\frac{PD}{DM}=\frac{QE}{EN}$，可见 Q 与 Q' 必重合.

所以说 P、Q、T 三点共线.

同理可证 F、G、T 三点共线.

故 BC、DE、FG、PQ 四条直线相交于一点.

评注：证法1运用几个相关的比例式，是一种漂亮的解法；证法2运用合比定理；证法3和4运用梅涅劳斯定理和逆定理；证法5运用三角形的面积比，相似三角形和四点共圆以及同一法获得圆满答案. 五种证法均为通法.

3. 显然，$c>1$. 再由 $b^3=(c^2-a)(c^2+a)$，若取 $c^2-a=b, c^2+a=b^2$，这时

$$c^2=\frac{b(b+1)}{2}.$$

自小到大考察 b，使右端取平方数，可知，当 $b=8$ 时，有 $c=6$，从而，$a=28$.

接下来说明，c 没有更小的正整数解，如表 1.

表 1

c	c^4	小于 c^4 的 x^3
2	16	1,8
3	81	1,8,27,64
4	256	1,8,27,64,125,216
5	625	1,8,27,64,125,216,343,512

表 1 每一行中，c^4-x^3 皆不是平方数，因此，c 的最小值为 6.

B 卷

三、解答题

1. 证法 1：记 $f(x)=ax^2+bx+c$，由题设得 $b=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}a+\sqrt{5}c)$，则 $f(\sqrt{\frac{3}{5}})=\frac{3}{5}a+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}b+c=\frac{3}{5}a-\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}a+\sqrt{5}c)+c=\frac{3-\sqrt{10}}{5}a$，

$f(1)=a+b+c=a-\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}a+\sqrt{5}c)+c=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\sqrt{3}-\sqrt{2})a-(\sqrt{5}-\sqrt{3})c]$.

若 $a>0, c<0$，显然 $f(\sqrt{\frac{3}{5}})<0, f(1)>0$；

若 $a<0, c>0$，显然 $f(\sqrt{\frac{3}{5}})>0, f(1)<0$.

$\therefore$ 当 $ac<0$ 时，总有 $f(\sqrt{\frac{3}{5}})\cdot f(1)<0$.

故原方程必有一根介于 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 与 1 之间.

证法 2∵ $ac<0$,∴ $\Delta=b^2-4ac>0$.

∴ 原方程有两个异号的实根,不妨设两个根为 $x_1<0<x_2$,由韦达定理,得

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

由 $\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$,

得 $\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{b}{a}+\sqrt{5}\cdot\frac{c}{a}=0$,

即 $\sqrt{2}-\sqrt{3}(x_1+x_2)+\sqrt{5}x_1x_2=0$.

解得 $x_2=\frac{\sqrt{3}x_1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}x_1-\sqrt{3}}$.

假设 $x_2\leqslant\sqrt{\frac{3}{5}}$,则 $\frac{\sqrt{3}x_1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}x_1-\sqrt{3}}\leqslant\sqrt{\frac{3}{5}}$. 注意到 $x_1<0$,推得 $-\sqrt{10}\geqslant-3$,不成立. 故 $x_2>\sqrt{\frac{3}{5}}$.

假设 $x_2\geqslant1$,则 $\frac{\sqrt{3}x_1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}x_1-\sqrt{3}}\geqslant1$,注意到 $x_1<0$,推得 $x_1\geqslant\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}>0$,矛盾,故 $x_2<1$.

综上所述 $\sqrt{\frac{3}{5}}<x_2<1$.

故原方程有一根介于 $\sqrt{\frac{3}{5}}$ 与 1 之间.

评注:证法 1 的思维程序是想办法论证当 $x=\sqrt{\frac{3}{5}}$ 和 $x=1$ 时,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的值异号即可获得证明;证法 2 是从根与系数的关系入手,并运用了反证法,两法均为论证一元二次方程区间根的通法,比较两种证法,证法 2 简洁明快,更为佳妙.

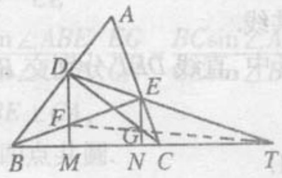


图6

2. 证法1：如图6，设过 D、E 的垂线分别交 BC 于 M、N，在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，由射影定理，得 $CE^2=CN\cdot CB$，$BD^2=BM\cdot BC$.

$\therefore\quad \dfrac{CN}{BM}=\dfrac{CE^2}{BD^2}$.

又 $\mathrm{Rt}\triangle CNG\backsim\mathrm{Rt}\triangle CDB$，$\mathrm{Rt}\triangle BMF\backsim\mathrm{Rt}\triangle BEC$，

$\therefore\quad GN=\dfrac{BD}{CD}\cdot CN$，$FM=\dfrac{CE}{BE}\cdot BM$.

$$\therefore\quad \frac{GN}{FM}=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CN}{BM}=\frac{BD\cdot BE}{CD\cdot CE}\cdot\frac{CE^2}{BD^2}=\frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}.\qquad ①$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BDC$ 中，由面积关系，得

$BE\cdot CE=EN\cdot BC$，$BD\cdot CD=DM\cdot BC$.

$$\therefore\quad \frac{BE\cdot CE}{BD\cdot CD}=\frac{EN}{DM}=\frac{TN}{TM}.\qquad ②$$

由①、②得 $\dfrac{GN}{FM}=\dfrac{TN}{TM}$.　　　(※)

又 $GN\parallel FM$，$\therefore$　F、G、T 三点共线.

证法2：如图7，设 CD 与 BE 相交于点 H，则 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 记 DF、EG、AH 与 BC 的交点分别为 M、N、R.

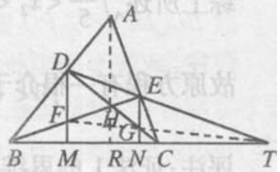


图7

$\because\quad DM\parallel AR\parallel EN$，

$\therefore\quad \dfrac{DF}{FM}=\dfrac{AH}{HR}=\dfrac{EG}{GN}$.

由合比定理，得

$\dfrac{DM}{FM}=\dfrac{EN}{GN}$，$\dfrac{GN}{FM}=\dfrac{EN}{DM}=\dfrac{TN}{TM}$.

故 F、G、T 三点共线.

证法 3：在$\triangle ABC$中，直线DET分别交BC、CA、AB于T、E、D，由梅涅劳斯定理，得

$$\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}=1. \quad ①$$

如图 8，设CD与BE相交于H，则H为$\triangle ABC$的垂心，$AH\perp BC$.

$\because\ DF\perp BC, EG\perp BC$,

$\therefore\ DF /\!/ AH /\!/ EG$.

$\therefore\ \frac{CE}{EA}=\frac{CG}{GH}, \frac{AD}{DB}=\frac{HF}{FB}$.

代入①得$\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CG}{GH}\cdot\frac{HF}{FB}=1$

根据梅涅劳斯定理的逆定理，F、G、T三点共线.

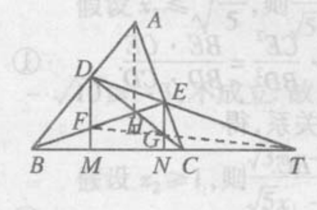


图 8

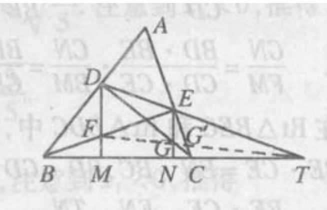


图 9

证法 4：如图 9，连接FT交EN于G'，易知$\frac{DF}{FM}=\frac{EG'}{G'N}$.

为了证明F、G、T三点共线，只需证明$\frac{DF}{FM}=\frac{EG}{GN}$即可.

$$\because\ \frac{DF}{FM}=\frac{S_{\triangle BDF}}{S_{\triangle BMF}}=\frac{\frac{1}{2}BD\cdot BF\sin\angle ABE}{\frac{1}{2}BM\cdot BF\sin\angle CBE}=\frac{BD}{BM}\cdot\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle CBE},$$

$$\frac{EG}{GN}=\frac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle CMG}}=\frac{\frac{1}{2}CE\cdot CG\sin\angle ACD}{\frac{1}{2}CN\cdot CG\sin\angle BCD}=\frac{CE}{CN}\cdot\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}.$$

又$\frac{BD}{BM}=\frac{BC}{BD}, \frac{CE}{CN}=\frac{BC}{CE}$,

$$\therefore\ \frac{DF}{FM}=\frac{BC\sin\angle ABE}{BD\sin\angle CBE}, \frac{EG}{GN}=\frac{BC\sin\angle ACD}{CE\sin\angle BCD}. \quad ①$$

$\because\ CD\perp AB, BE\perp CA$,

$\therefore\ B$、D、E、C四点共圆.

$\therefore\ \angle ABE=\angle ACD.$ ②

又$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=BC=\frac{CE}{\sin\angle CBE}$,

$\therefore BD\sin\angle CBE=CE\sin\angle BCD.$ ③

将②、③代入①，得$\frac{DF}{FM}=\frac{EG}{GN}$.

故F、G、T三点共线.

3. 显然 $c>1$. 由题设得 $(c^2-a)(c^2+a)=b^3$.

若取 $\begin{cases}c^2-a=b,\\c^2+a=b^2,\end{cases}$ 则 $c^2=\dfrac{b(b+1)}{2}$.

由小到大考察 b, 使 $\dfrac{b(b+1)}{2}$ 为完全平方数. 易知当 $b=8$ 时, $c^2=36$, 则 $c=6$, 从而 $a=28$.

下面说明 c 没有比 6 更小的正整数解. 列表如下:

c	c^4	$x^3(x^3<c^4)$	c^4-x^3
2	16	1,8	17,8
3	81	1,8,27,64	80,73,54,17
4	256	1,8,27,64,125,216	255,248,229,192,131,40
5	625	1,8,27,64,125,216,343,512	624,617,598,561,500,409,282,113

显然, 表中 c^4-x^3 的值均不是完全平方数. 故 c 的最小值为 6.

评注: 本题在解答过程中运用因式分解、完全平方数的性质和奇偶性分析法.

C 卷

三、解答题

1. 同 A 卷第 1 题.

2. 同 A 卷第 2 题.

3. 在 $0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2$ 中, 共有 1003 个(奇数个)奇数, 因此, 无论怎样添加"+"号或"−"号, 其代数和必为奇数. 于是, 前 10 个正整数中, 可表出的数必在 1,3,5,7,9 之中.

下面说明, 这 5 个数皆可表出.

注意到, 对于 4 个连续平方数

$k^2,(k+1)^2,(k+2)^2,(k+3)^2$,

有 $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$,

及 $-k^2+(k+1)^2+(k+2)^2-(k+3)^2=-4$.

因此, 8 个连续平方数, 适当添加"+"号或"−"号, 可使其代数和为 0. 从而, $8n$ 个连续平方数添加"+"号或"−"号, 也可使其代数和为 0.

今取 2000 个 $(8\times250$ 个) 连续平方数 $6^2,7^2,\cdots,2005^2$, 添加"+"号或"−"号, 使其代数和为 0, 再处理前 5 个数.

因为 $-1^2+2^2-3^2-4^2+5^2=3$, $1^2+2^2-3^2-4^2+5^2=5$,

故 3 与 5 皆可表出.

取 1992 个 $(8\times249$ 个) 连续平方数 $14^2,15^2,\cdots,2005^2$, 添加"+"号或"−"号, 使其代数和为 0, 再处理前 13 个平方数. 因为

$-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)+8^2+9^2-(10^2-11^2-12^2+13^2)=1$,

$-(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2)+8^2+9^2+(10^2-11^2-12^2+13^2)=9$,

$1^2+2^2+3^2-4^2-5^2-6^2+7^2-8^2+9^2+10^2-11^2-12^2+13^2=7$,

故 1,7,9 也可表出.

因此, 1,3,5,7,9 皆可表出.