1991 年全国初中数学联赛试题

第一试

一、选择题

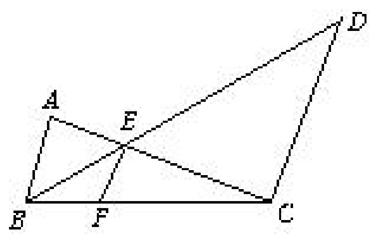
本题共有 8 个小题，每小题都给出了（A）、（B）（C）、（D）四个答案结论，其中只有一个是正确的．请把正确结论的代表字母写在题后的圆括号内．

1．设等式$\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$在实数范围内成立，其中 a，x，y 是两两不同的实数，则$\dfrac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$的值是（　　）

（A）3 ；　（B）$\dfrac{1}{3}$；　（C）2；　（D）$\dfrac{5}{3}$．

2. 如图，AB // EF // CD，已知 AB=20，CD=80，BC=100，那么 EF 的值是（　）

（A） 10；（B）12；（C）16；（D）18



3．方程$x^2-|x|-1=0$的解是（　　）

（A）$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$；（B）$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；（C）$\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$或$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$；（D）$\pm\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．

4.已知：$x=\dfrac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}}-1991^{-\frac{1}{n}})$（n 是自然数）．那么$(x-\sqrt{1+x^2})^n$，的值是（　　）

（A）1991^{-1}；（B）-1991^{-1}；（C）$(-1)^n1991$；（D）$(-1)^n1991^{-1}$．

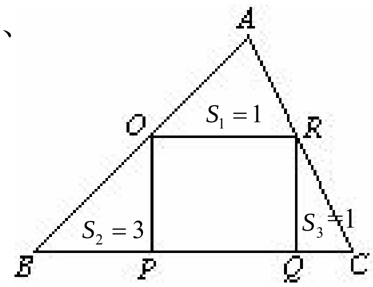
5. 若$1\times2\times3\times\cdots\times99\times100=12^nM$，其中$M$为自然数，n 为使得等式成立的最大的自然数，则$M$（　　）

（A）能被 2 整除，但不能被 3 整除；　（B）能被 3 整除，但不能被 2 整除；
（C）能被 4 整除，但不能被 3 整除；　（D）不能被 3 整除，也不能被整除．

6. 若 a，c，d 是整数，b 是正整数，且满足$a+b=c$，$b+c=d$，$c+d=a$，那么$a+b+c+d$的最大值是（　　）

(A) -1　(B) -5　(C) 0　(D) 1

7. 如图，正方形 $OPQR$ 内接于 ΔABC．已知 ΔAOR、ΔBOP 和 ΔCRQ 的面积分别是 $S_1=1$，$S_2=3$ 和 $S_3=1$，那么，正方形 $OPQR$ 的边长是（　　）



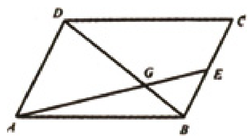
（A）$\sqrt{2}$；（B）$\sqrt{3}$；（C）2 ；（D）3．

8. 在锐角 ΔABC 中，$AC=1$，$AB=c$，$\angle A=60^\circ$，ΔABC 的外接圆半径 $R\le 1$，则（　　）

（A）$\frac{1}{2}<c<2$ ；　（B）$0<c\le\frac{1}{2}$；　（C）$c>2$；　（D）$c=2$.

二、填空题

1．E是平行四边形 $ABCD$ 中 BC 边的中点，AE 交对角线 BD 于 G，如果 ΔBEG 的面积是 1 ，则平行四边形 $ABCD$ 的面积是 __________.

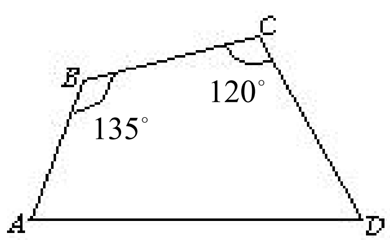


2．已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数解．甲由于看错了二次项系数，误求得两根为 2 和 4；乙由于看错了某一项系数的符号，误求得两根为－1 和 4，那么，$\frac{2b+3c}{a}=$ __________ .

3．设 m，n，p，q 为非负数，且对一切 $x>0$，$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^q}$ 恒成立，则

$(m^2+2n+p)^{2q}=$ __________ .

4．四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=135^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，$AB=\sqrt{6}$，$BC=5-\sqrt{3}$，$CD=6$，则 $AD=$ _______ .

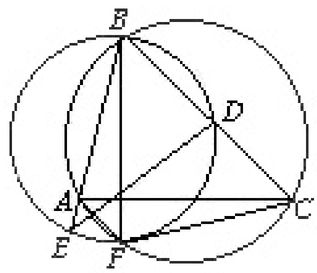


第二试

一、$x+y$， $x-y$， xy， $\frac{x}{y}$ 四个数中的三个有相同的数值，求出所有具有这样性质的数对（x,y）.

二、ΔABC 中，$AB<AC<BC$，D 点在 BC 上，E 点在 BA 的延长线上，且 $BD=BE=AC$，ΔBDE 的外接圆与 ΔABC 的外接圆交于 F 点（如图）.

求证：$BF=AF+CF$



三、将正方形 $ABCD$ 分割为 n^2 个相等的小方格（n 是自然数），把相对的顶点 A，C 染成红色，把 B，D 染成蓝色，其他交点任意染成红、蓝两色中的一种颜色．证明：恰有三个顶点同色的小方格的数目必是偶数.

1991 年全国初中数学联赛试题答案

第一试

一、选择题

1．（B）

据算术根性质，由右端知 $y<a<x$，又由左端知 $a\geq 0$ 且 $a\leq 0$，故 $a=0$．
由此得 $x=-y$，代入所求式算得值为 $\frac{1}{3}$

2．（C）

由平行截割定理，有 $\frac{EF}{80}=\frac{BF}{100}$①， $\frac{EF}{20}=\frac{FC}{100}$ ②

①+②，得 $\frac{EF}{80}+\frac{EF}{20}=\frac{BF+FC}{100}=1$， $5EF=80$，$EF=16$.

3. （D）

设 x_0 是方程的解，则 $-x_0$ 也是方程的解，排除（A）、（B）;（D）的两值必是方程的解，否则方程的解也不是（C）.

将 $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ 代入方程，左边≠0，排除（C）.

4．（D）

$$1+x^2=1+\frac{1}{4}(1991^{\frac{2}{n}}-2+1991^{-\frac{2}{n}})$$
$$=\left[\frac{1}{2}(1991^{\frac{1}{n}}+1991^{-\frac{1}{n}})\right]^2,$$

所以　　原式 $=(-1991^{-\frac{1}{n}})^n=(-1)^n 1991^{-1}$.

5．（A）

在 1×2×3×…×100 的质因数分解中，2 的因子有

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\cdots+\left[\frac{100}{2^6}\right]$$
$$=50+25+12+6+3+1=97(个);$$

3的因子有

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]$$
$$=33+11+3+1=48(个).$$

所以，$1\times 2\times 3\times\cdots\times 100=2^{97}\times 3^{48}\times P=12^{48}\times 2P$，其中 2 不整除 P，3 不整除 P，因而 $M=2P$.

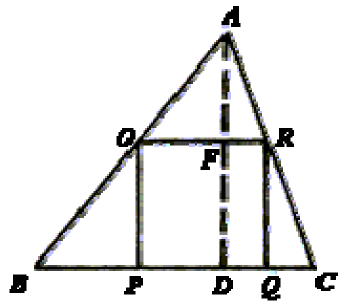
6. （B）

$(a+b)+(c+d)=c+a$，　$\therefore b=-d$.

代入 $b+c=d$ 得 $c=2d$，$a=c+d=3d$，

故 $a+b+c+d=2d+3d=5d=-5b\le-5$ ($\because b\ge1$).

故　　$a=-3$，$b=1$，$c=-2$，$d=-1$.



7.（C）

设正方形 $OPRQ$ 的边长为 x，即 $OP=PQ=Q=OR=x$．作 ΔABC 的高 AD，交 OR 于 F，在 ΔAOR 中，$AF=\dfrac{2S_1}{OR}=\dfrac{2}{x}$．如图.

同理可得　$BP=\dfrac{6}{x},QC=\dfrac{2}{x},$

故　$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}(\dfrac{2}{x}+x)(\dfrac{6}{x}+x+\dfrac{2}{x})$

$$=\frac{1}{2}(x^2+10+\frac{16}{x^2}).$$

另一方面　，$S_{\Delta ABC}=S_1+S_2+S_3+S_{OPRQ}=5+x^2.$

所以　$\dfrac{1}{2}(x^2+10+\dfrac{16}{x^2})=5+x^2$，$x^4=16$，$x=2.$

8.（A）

作 $CD\perp AB$，因 ΔABC 是锐角三角形，故 D 在 AB 内，从而

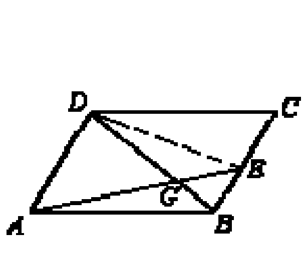
c $=AB>AD=AC\cos A=\cos A=\dfrac{1}{2}$.

又由正弦定理，得 c $=AB=2R\sin C<2R\le2$，

所以 $\dfrac{1}{2}<$c<2.

二、填空题

1．12



如图，由 $\Delta BEG\backsim\Delta DAG$，得 DG:**GB**＝**AD**:BE＝2:1，$\therefore DB=3GB$.

连接 DE，则

$S_{ABCD}=2S_{\Delta BCD}=2\times2S_{\Delta BDE}=4\times3S_{\Delta BGE}=12$

2．6

设甲将 a 看为 a'，由韦达定理得

$$-\frac{b}{a'}=6 \quad , \quad \frac{c}{a'}=8.$$

于是 $$\frac{b}{c}=-\frac{3}{4}.$$

由于一次项系数 b 的符号不改变判别式的值，因此，乙只能是看错 a 或 c 的符号．于是 $\frac{c}{a}=4.$

由①②得 $\frac{a}{b}=-3.$ 所以

$$\frac{2b+3c}{a}=-6+12=6.$$

3．9

由于$\frac{(x+1)^m}{x^n}-1=\frac{(x+1)^p}{x^q}$对一切$x>0$恒成立，取小，则有$2^m-1=2^p$.

由于$2^p\neq 0$, 2^m-1为奇数，因此 $p=0$, $m=1$.

再取 $x=2$，则有$\frac{3}{2^n}-1=\frac{1}{2^q}$，即$3-2^n=2^{n-q}$.

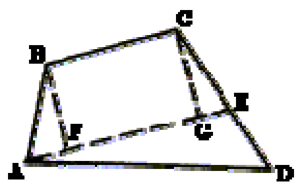
若 $n>q$，则上式左边为奇数，右边为偶数，矛盾．

若 $n<q$，则上式左边为整数，右边为真分数，矛盾．

所以，只能是 $n=q=1$．于是

$$(m^2+2n+p)^{2q}=3^2=9\,.$$

4．$2\sqrt{19}$



作 $AE/\!/BC$，交 CD 于 E，自 B，C 分别作 AE 的垂直线 BF 与 CG，F，G 分别为垂足（如图）．$BCGF$ 为矩形，ΔAFB 为等腰直角三角形，$BF=AF=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$．

在 RtΔCEG 中， $\angle GCE=30°$，由$CG=\sqrt{3}$知

$$GE=1，CE=2，FG=BC=5-\sqrt{3}.$$

所以 $$AE=AF+FG=GE$$
$$=\sqrt{3}+5-\sqrt{3}+1=6.$$
$$ED=CD-CE=6-2=4.$$

又 $\angle AED=\angle BCD=120°$，在$\triangle AED$中应用余弦定理，有

$AD^2=AE^2+ED^2-2AE\cdot ED\cos 120°=36+16+24=76.$

所以 $$AD=\sqrt{76}=2\sqrt{19}.$$

第　二　试

一、由于$\dfrac{x}{y}$有意义，所以 $y\neq 0$，从而 $x+y\neq x-y$.

因此 $xy=\dfrac{x}{y}$，即 $x(y^2-1)=0$.

所以 $x=0$ 或 $y=\pm 1$.

(1)　若 $x=0$，则由 $xy=x+y$，或 $xy=x-y$，得 $y=0$，这样$\dfrac{x}{y}$无意义；

(2)　若 $y=1$，则由 $xy=x+y$ 得 $x=x+1$，
或由 $xy=x-y$ 得 $x=x-1$，都导致矛盾；

(3)　若 $y=-1$，则由 $xy=x+y$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$，

由 $xy=x-y$ 得 $x=-\dfrac{1}{2}$，

所以符合要求的数对只有 $(\dfrac{1}{2},-1)$ 和 $(-\dfrac{1}{2},-1)$.

二、证法 1　延长 AF 到 M，使 $FM=CF$．连 CM、DF，在 ΔEBD 与 ΔFCM 中，由于 $BE=BD$，$FM=CF$ ，因此 ΔEBD、ΔFCM 都是等腰三角形.

∵　$\angle EBD=\angle MFC$，

∴　$\angle BED=\angle CMF$，

又　$\angle BED=\angle BFD$，

∴　$\angle CMF=\angle BFD$，

在 ΔBFD 与 ΔAMC 中，

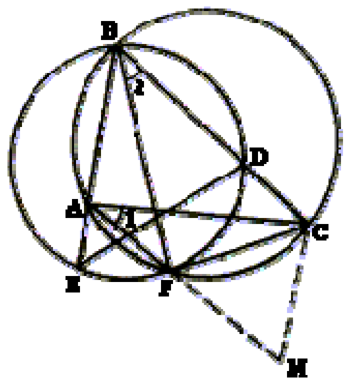
$\angle 2=\angle 1$，$\angle BFD=\angle CMF$，$BD=AC$，

∴　$\Delta BFD\cong\Delta AMC$.

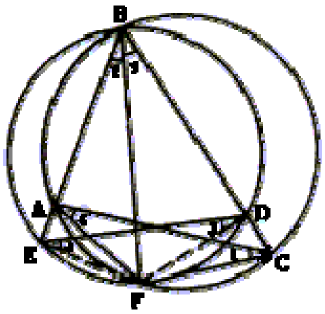
∴　$BF=AM=AF+FM$.

又∵　$FM=CF$，

∴　$BF=AF+CF$.



证法 2 如图，连 EF、DF



∵ $\angle 1=\angle 2$，

$\angle 2=\angle 3$，

∴ $\angle 1=\angle 3$，

∵ $\angle 4=\angle 5$，

$\angle 5=\angle 6$，

∴ $\angle 4=\angle 6$.

∴ $\Delta AFC \backsim \Delta EFD$.

于是 $\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{DF}{CF}=k$，

即 $EF=k\cdot AF$，$DE=k\cdot AC$，$DF=k\cdot CF$.

由托勒密定理，知 $BF\cdot DE=BD\cdot EF+BE\cdot DF$，

即 $BF\cdot k\cdot AC=BD\cdot k\cdot AF+BE\cdot k\cdot CF$.

但是 $AC=BE=BD\neq 0$，

所以 $BF=AF+CF$.

三 **证法 1** 用数代表颜色，将红色记为 0，蓝色记为 1，再将小方格编号，记为 $1,2,3,\ldots,n^2$.

又记第 i 个小方格四个顶点数字之和为 A_i,若恰有三个顶点同色,则 A_i =1 或 3 为奇数,否则 A_i 为偶数.

在 $A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$ 中,有如下事实:

对正方形内部的交点,各加了 4 次;

原正方形边上非端点的交点,各加了 2 次(含两个 0,两个 1).

因此 $A_1+A_2+\cdots+A_{n^2}$ ＝4×(内部交点相应的数之和)＋2×(边上非端点的交点相应的数之和)＋2 必为偶数.

于是，在 $A_1,A_2,\cdots,A_{n^2}$ 中必有偶数个奇数，这就是说，恰有三个顶点同色的小方格必有偶数个.

证法 2 用数代表颜色，红色记为 1，蓝色记为-1，将小方格编号，记为 1，2，…，n^2.

记第 i 个小方格四顶点数字之乘积为 A_i，若恰有三顶点同色，则 $A_i=-1$,否则$A_i=1$.

现在考虑乘积 $A_1\times A_2\times\cdots A_{n^2}$. 对正方形内部交点，各点相应的数重复出现 4 次；*A*，*B*，*C*，*D* 边上的不是端点的交点相应的数各出现 2 次；A，B，C，D 四点相应的数的乘积为

$$1\times1\times(-1)\times(-1)=1.$$

于是 $$A_1\times A_2\times\cdots A_{n^2}=1.$$

因此，$A_1\times A_2\times\cdots A_{n^2}$ 中－1 的个数必为偶数，即恰有三顶点同色的小方格必有偶数个.

证法 3 考虑染了色之后，改变一个交点的染色方式，这时以此点为顶点的小方格，要么由三顶点同色变为非三顶点同色，要么由非三顶点同色变成三顶点同色.

注意：除 *A*，*B*，*C*，*D* 之外，每一交点必是偶数个小方格的顶点，因此，改变一个交点的染色并不改变三顶点同色小方格数目的奇偶性.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

当 $n>1$ 时，每次改变一个交点的染色，最终总可以使 *B*，*D* 之外的点皆为红色，这时，三顶点同色的小方格只有两个，为偶数.

因此，任意染色之下，三顶点同色的小方格有偶数个.