

第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛试题 A (初一组)

(时间: 2010 年 4 月 10 日 10:00~11:30)

一、填空题 (每题 10 分, 共 80 分)

1. 互不相等的有理数 a, b, c 在数轴上的对应点分别为 A, B, C . 如果

$$|a-b|+|c-a|=|b-c|,$$

那么在点 A, B, C 中, 居中的是点_____.

2. 右图所示的立体图形由 9 个棱长为 1 的正方体木块搭成, 这个立体图形的表面积为_____.



3. 汽车 A 从甲站出发开往乙站, 同时汽车 B、C 从乙站出发与 A 相向而行开往甲站, 途中 A 与 B 相遇后 15 分钟再与 C 相遇. 已知 A、B、C 的速度分别是每小时 90km, 80km, 70km, 那么甲乙两站的路程是_____km.

4. 把自然数 1~2010 分组, 要求每组内任意 3 个数的最大公约数为 1, 则至少需要分成_____组.

5. 已知正 n 边形的内角度数的两倍为整数, 那么这样的正整数 n 有_____个.

6. 已知 $\frac{a+2b}{7} = \frac{3b-2c}{5} = \frac{c-2a}{3}$, 则 $\frac{3a+b-2c}{2a-5b+6c}$ 的值等于_____.

7. 六人参加乒乓球比赛, 每两人赛一场, 分胜负, 无平局. 最终他们胜的场数分别是 a, b, b, c, d, d , 且 $a > b > c > d$, 那么 a 等于_____.

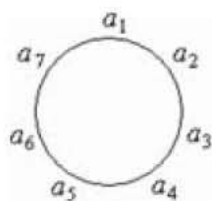
8. 某中学新建游泳池开启使用, 先用一天时间匀速将空游泳池注满, 经两天的处理后同速将水放光; 然后开始同速注水, 注满一半时, 将注水速度加倍直到注满. 请在下图中用图表示游泳池中水量随时间的变化关系.

水量(池满为 1)



二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 能否找到 7 个整数, 使得这 7 个整数沿圆周排成一圈后, 任 3 个相邻数的和都等 29? 如果能, 请举一例. 如果不能, 请简述理由.



10. 已知 k 是满足 $1910 < k < 2010$ 的整数, 并且使二元一次方程组

$$\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 4x + 5y = k \end{cases}$$

有整数解. 问: 这样的整数 k 有多少个?

11. 所有以质数 p 为分母的最简真分数的和记为 m , 所有以质数 q 为分母的最简真分数的和记为 n . 若 $mn = 48$, 求 $m + n$ 的可能值.

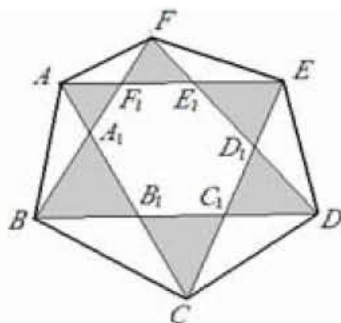
12. 解方程

$$x[x] = 80,$$

其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 右图中, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEF$, $\triangle EFA$, $\triangle FAB$ 的面积之和等于六边形 $ABCDEF$ 的面积. 又图中的 6 个阴影三角形面积之和等于六边形 $ABCDEF$ 的面积之 $\frac{1}{3}$. 求六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面积与六边形 $ABCDEF$ 的面积之比.



14. 一个单项式加上多项式 $9(x-1)^2 - 2x - 5$ 后等于一个整式的平方, 试求所有这样的单项式.

第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛试题 B (初一组)

(时间: 2010 年 4 月 10 日 10:00~11:30)

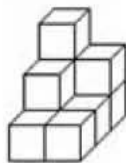
一、填空题 (每题 10 分, 共 80 分)

1. 互不相等的有理数 a, b, c 在数轴上的对应点分别为 A, B, C . 如果

$$|a-b|+|b-c|=|c-a|,$$

那么在点 A, B, C 中, 居中的是点_____.

2. 右图所示的立体图形由 10 个棱长为 1 的正方体木块搭成, 这个立体图形的表面积为_____.



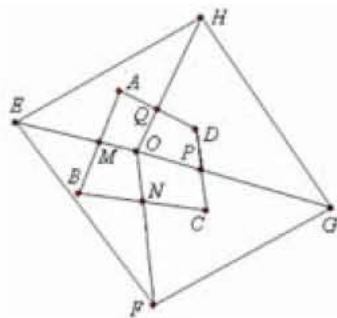
3. 某班有 36 人买了铅笔, 共买了 50 支, 有人买了 1 支, 有人买了 2 支, 也有人买了 3 支. 如果买 1 支的人数是其余人数的 2 倍, 那么买 2 支铅笔的学生数为_____.

4. 已知 a, b 是正整数, $\frac{a}{5}$ 和 $\frac{b}{7}$ 都是真分数, 且 $\frac{a}{5} + \frac{b}{7} \approx 1.66$, 则

$$a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

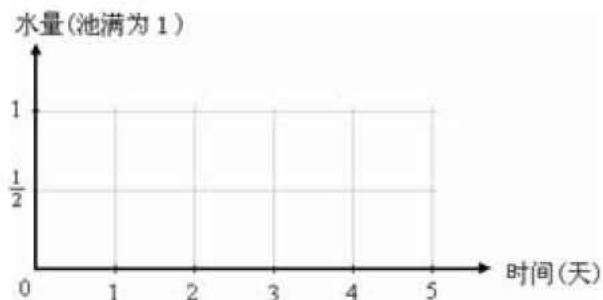
5. 三个三位数 $\overline{abb}, \overline{bab}, \overline{bba}$ 由数字 a, b 组成, 它们的和是 2331, 则 $a+b$ 的最大值是_____.

6. 右图中, 四边形 $ABCD$ 的面积为 6, 点 M, N, P, Q 分别为各边的中点. 点 O 为 $ABCD$ 内的一点. 连接 OM 并延长至 E 点, 使得 $2OM = ME$, 同样的方式可得点 F, G, H . 则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.



7. 至少任取_____个正整数, 可以保证其中必存在 6 个数, 它们的和是 6 的倍数.

8. 某中学新建游泳池开启使用,先用一天时间匀速将空游泳池注满,经一天的处理后同速将水放光;然后开始同速注水,注满一半时,将注水速度减半直到注满.请在下图中用图表示游泳池中水量随时间的变化关系.



二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 当 $-4 \leq x \leq 8$ 时, $||x-2|-1|-2|-3$ 的最小值与最大值分别是多少?

10. 右图中有 5 个由 4 个 1×1 的小正方形组成的不同形状的硬纸板. 问能用这 5 个硬纸板拼成右图中 4×5 的长方形吗? 如果能, 请画一种拼法; 如果不能, 请简述理由.

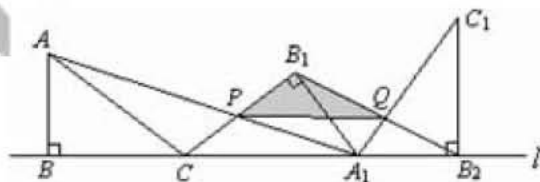


11. 已知 a, b, c 取互不相等的正整数, 求 $\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值.

12. 求方程组 $3x+y=\frac{13}{2}$, $2x-[y]=\frac{7}{3}$ 的解, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 下图中, 点 B, C, A_1, B_2 在同一直线 l 上; 将直角三角形 ABC 以点 C 为心可以旋转至与直角三角形 A_1B_1C 重合, 再以点 A_1 为心可以旋转至与直角三角形 $A_1B_2C_1$ 重合; 连接 AA_1 交 B_1C 于点 P , 连接 B_1B_2 交 A_1C_1 于点 Q . 设 $AB=3$, $BC=4$, 求阴影三角形 B_1PQ 的面积.



14. 一个单项式加上多项式 $(x-1)^2 - \frac{2}{9}x - \frac{5}{9}$ 后等于一个整式的平方, 试求所有这样的单项式.

第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛 决赛试题 C (初一组)

(时间: 2010 年 4 月 10 日)

一、填空题 (每题 10 分, 共 80 分)

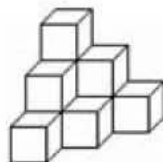
1. 互不相等的有理数 a, b, c 在数轴上的对应点分别为 A, B, C . 如果

$$|c-b|+|c-a|=|b-a|,$$

那么在点 A, B, C 中, 居中的是点_____.

2. 甲、乙两人在 400 米跑道上练习长跑, 甲的速度与乙的速度的比为 5:3, 若两人同时出发, 则乙跑了_____圈时, 甲比乙多跑了 4 圈.

3. 右图所示的立体图形由 10 个棱长为 1 的正方体木块搭成, 这个立体图形的表面积为_____.



4. 已知 a, b 是正整数, $\frac{a}{5}$ 和 $\frac{b}{7}$ 都是真分数, 且 $\frac{a}{5} + \frac{b}{7} \approx 1.66$, 则

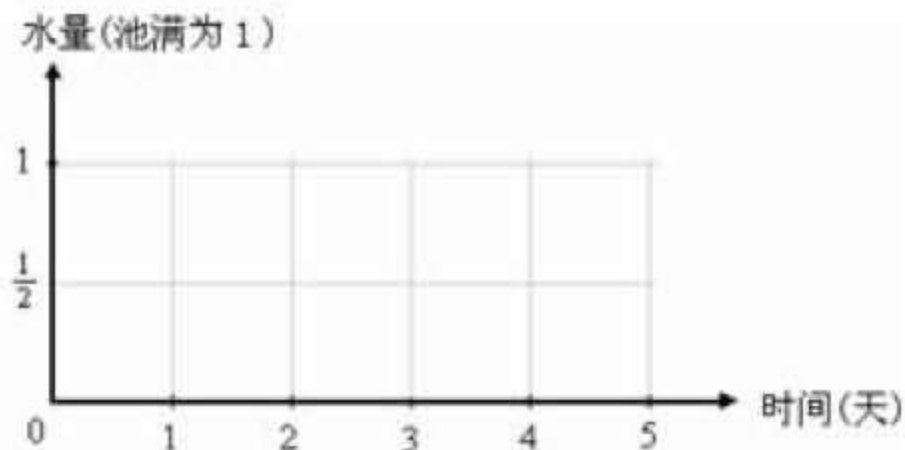
$$a^2 + b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

5. 按原设计, 在一条 3000 米长的新公路的一侧, 从一端开始每隔 50 米立一根电线杆, 并已挖好了立电线杆的坑. 现改为每隔 60 米立一根电线杆, 则需要重新挖坑_____个, 有_____个原来挖好的坑将废弃不用.

6. 已知正 n 边形的内角度数为整数, 那么这样的正整数 n 有_____个.

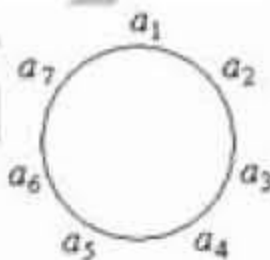
7. 小明在分别写有数字 1 到 9 的卡片中选了四张, 然后把所有用这四张卡片能摆成的四位数加了起来, 但他不小心把其中一个四位数多加了一次, 结果得到错误的和 128313. 那么, 正确的和应该为_____.

8. 某中学新建游泳池开启使用,先用一天时间匀速将空游泳池注满;经一天的处理后开始同速排水,排到一半时,将排水速度减半直到排光;然后开始以第一天的注水速度注水,直到注满.请在下图中用图表示游泳池中水量随时间的变化关系.



二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 能否找到 7 个整数,使得这 7 个整数沿圆周排成一圈后,任 3 个相邻数的和都等 29? 如果能,请举一例.如果不能,请简述理由.

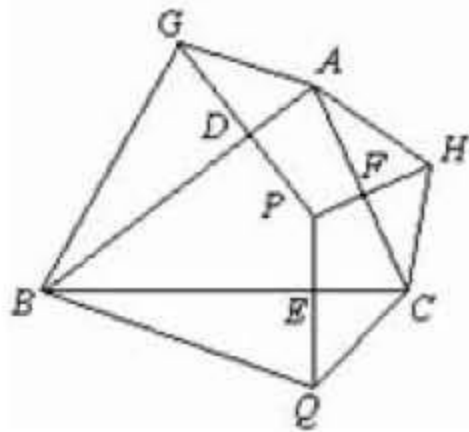


10. 设 a, b 为有理数, 方程 $||x-a|-b|=3$ 有三个互不相等的解, 求 b 的值.
11. 六人参加乒乓球比赛, 每两人赛一场, 分胜负, 无平局. 最终他们胜的场数分别为 a, a, b, c, d, d , 且 $a > b > c > d$, 问 a 等于多少?
12. 解方程: $x[x]=115$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.

三、解答下列各题 (每题15分, 共30分, 要求写出详细过程)

13. 右图中, 点 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, GP, PQ, HP 分别是边 AB, BC, AC 的垂线, 交点分别为 D, E, F .

如果 $AG = AH = 4, BG = BQ = 10$, 求 $\frac{CH}{CQ}$ 的值.



14. 一个单项式加上多项式 $\frac{9}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ 后等于一个整式的平方, 试求所有这样的单项式.

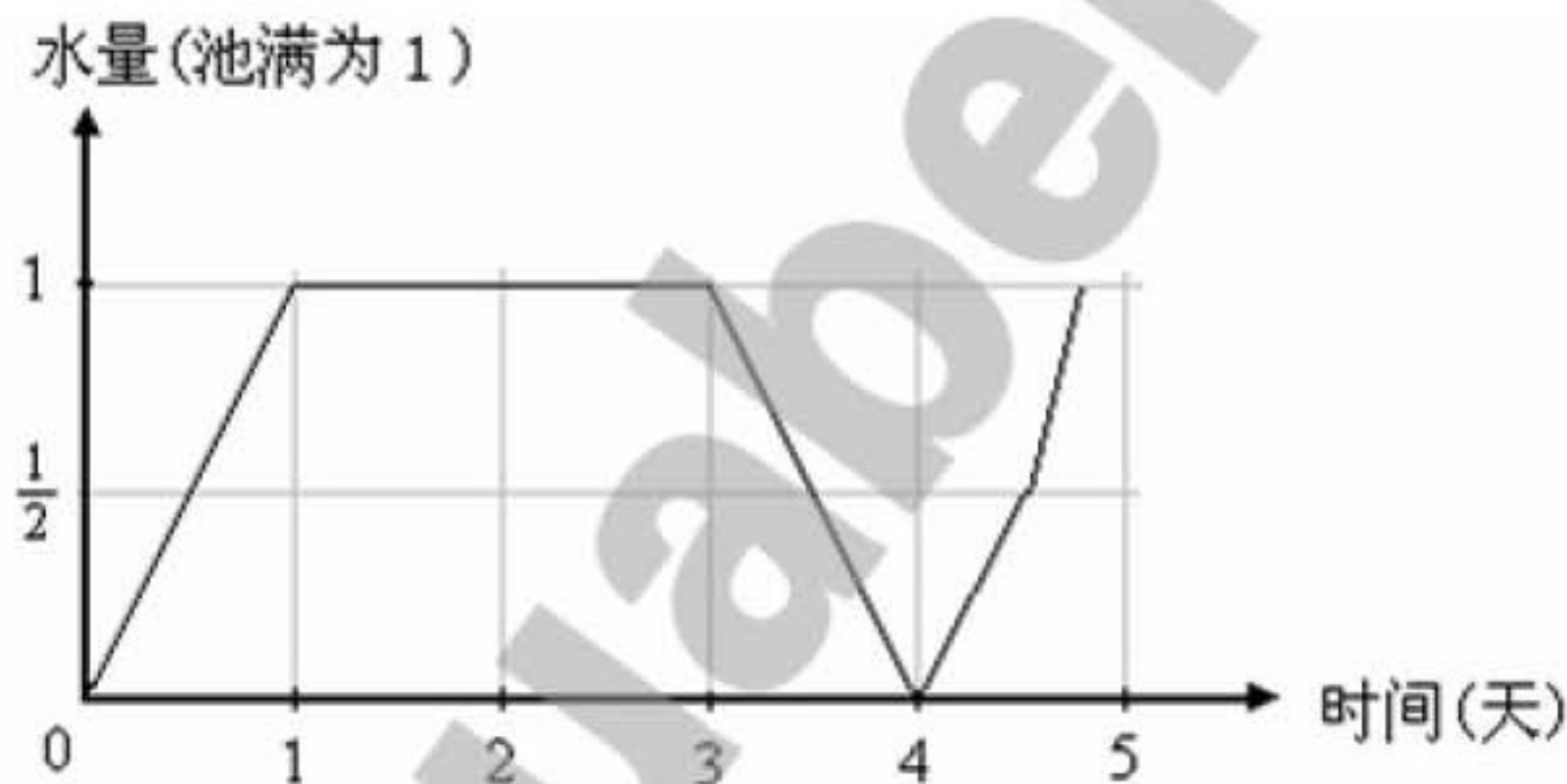
第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案 (初一组)

一、填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	A	32	680	503	28	$\frac{26}{11}$	5

8. 解答.



二、解答下列各题 (每题10分, 共40分, 要求写出简要过程)

9. 答案: 不能.

10. 答案: 2.

11. 答案: 14, 49, 96.5 (注: 96.5可答可不答).

12. 答案: $x = -\frac{80}{9}$.

三、解答下列各题 (每题15分, 共30分, 要求写出详细过程)

13. 答案: $\frac{1}{3}$.

14. 答案: $16x^2$, 或 $8x$, 或 $32x$, 或 $\frac{64}{9}$.

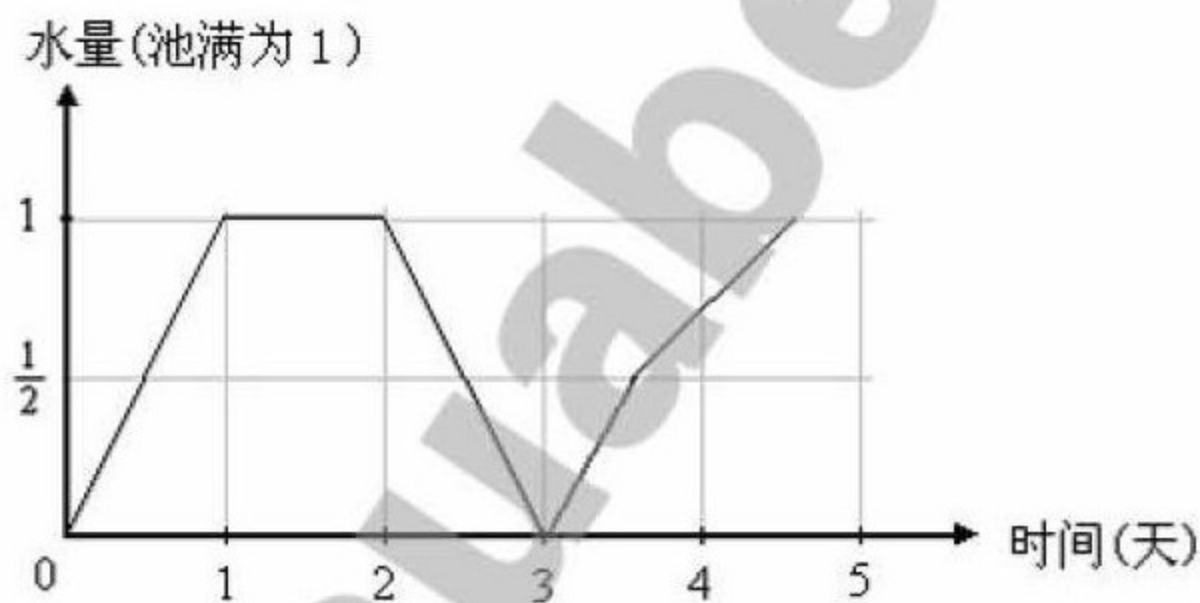
第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 B 参考答案 (初一组)

一、填空 (每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	B	34	10	52	15	27	11

8. 解答.



二、解答下列各题 (每题 10 分, 共 40 分, 要求写出简要过程)

9. 答案: $-3, 0$.

10. 答案: 不能.

11. 答案: 1.

12. 答案: $x = \frac{5}{3}, y = \frac{3}{2}$.

三、解答下列各题 (每题 15 分, 共 30 分, 要求写出详细过程)

13. 答案: $2\frac{514}{715}$.14. 答案: $\frac{16}{9}x^2, \frac{8}{9}x, \frac{32}{9}x, \frac{64}{81}$.

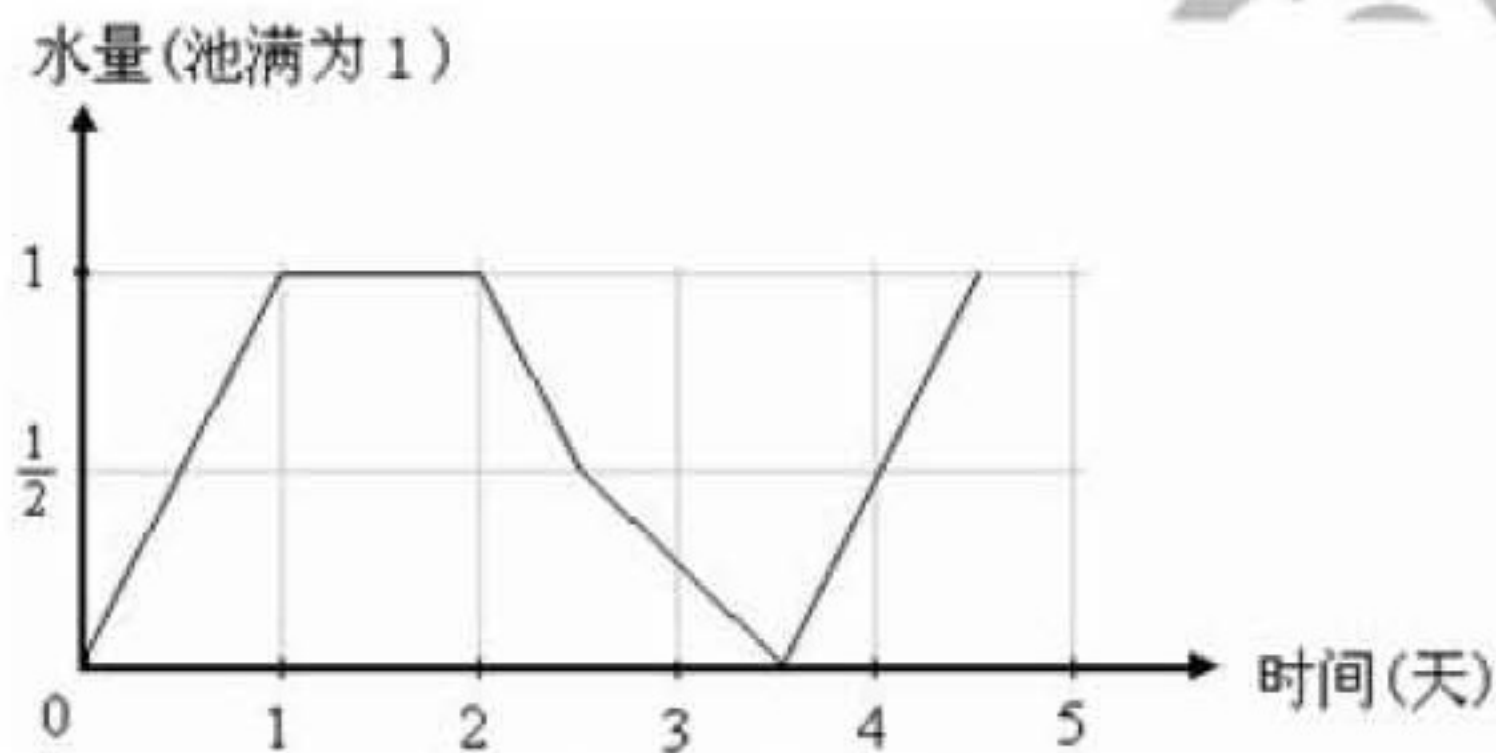
第十五届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 C 参考答案(初一组)

一、填空(每题 10 分, 共 80 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7
答案	C	6	36	52	40, 50	22	119988

8. 解答.



二、解答下列各题(每题10分, 共40分, 要求写出简要过程)

9. 答案: 不能.

10. 答案: 3.

11. 答案: 4.

12. 答案: $x = -\frac{115}{11}$.

三、解答下列各题(每题15分, 共30分, 要求写出详细过程)

13. 答案: 1.

14. 答案: $4x^2$, $2x$, $8x$, $\frac{16}{9}$.