

## 2009 年新知杯上海市初中数学竞赛

一、填空题（第 1-5 小题每题 8 分，第 6-10 小题每题 10 分，共 90 分）

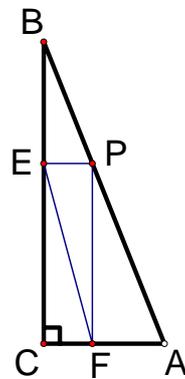
1、对于任意实数  $a, b$ ，定义  $a * b = a(a+b) + b$ ，已知  $a * 2.5 = 28.5$ ，则实数  $a$  的值是\_\_\_\_\_。

2、在三角形  $ABC$  中， $AB = b^2 - 1, BC = a^2, CA = 2a$ ，其中  $a, b$  是大于 1 的整数，则  $b - a =$ \_\_\_\_\_。

3、一个平行四边形可以被分成 92 个边长为 1 的正三角形，它的周长可能是\_\_\_\_\_。

4、已知关于  $x$  的方程  $x^4 + 2x^3 + (3+k)x^2 + (2+k)x + 2k = 0$  有实根，并且所有实根的乘积为  $-2$ ，则所有实根的和为\_\_\_\_\_。

5、如图，直角三角形  $ABC$  中  $AC = 1, BC = 2$ ， $P$  为斜边  $AB$  上一动点。 $PE \perp BC, PF \perp CA$ ，则线段  $EF$  长的最小值为\_\_\_\_\_。

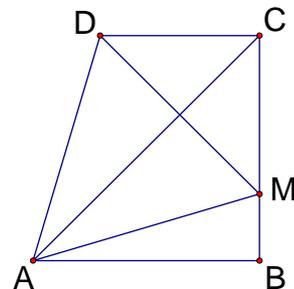
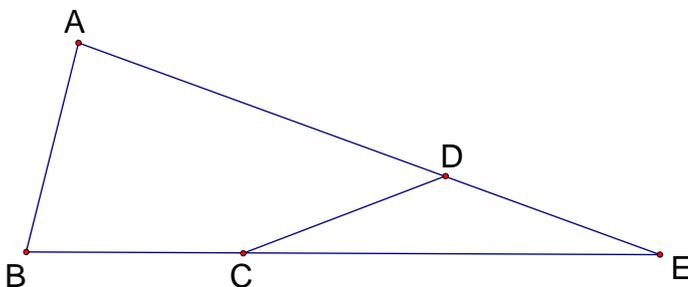


6、设  $a, b$  是方程  $x^2 + 68x + 1 = 0$  的两个根， $c, d$  是方程  $x^2 - 86x + 1 = 0$  的两个根，则  $(a+c)(b+c)(a-d)(b-d)$  的值为\_\_\_\_\_。

7、在平面直角坐标系中有两点  $P(-1, 1), Q(2, 2)$ ，函数  $y = kx - 1$  的图像与线段  $PQ$  延长线相交（交点不包括  $Q$ ），则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

8、方程  $xyz = 2009$  的所有整数解有\_\_\_\_\_组。

9、如图，四边形  $ABCD$  中  $AB = BC = CD$ ， $\angle ABC = 78^\circ$ ， $\angle BCD = 162^\circ$ 。设  $AD, BC$  延长线交于  $E$ ，则  $\angle AEB =$ \_\_\_\_\_。



10、如图，在直角梯形  $ABCD$  中， $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = BC = 10$ ，点  $M$  在  $BC$  上，使得  $\triangle ADM$  是正三角形，则  $\triangle ABM$  与  $\triangle DCM$  的面积和是\_\_\_\_\_。

二、(本题 15 分) 如图,  $\triangle ABC$  中  $\angle ACB = 90^\circ$ , 点  $D$  在  $CA$  上, 使得  $CD = 1, AD = 3$ , 并且  $\angle BDC = 3\angle BAC$ , 求  $BC$  的长。

三、(本题 15 分) 求所有满足下列条件的四位数  $\overline{abcd}$ :  $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$ , 其中数字  $c$  可以是 0。

四、(本题 15 分) 正整数  $n$  满足以下条件: 任意  $n$  个大于 1 且不超过 2009 的两两互素的正整数中, 至少有一个素数, 求最小的  $n$ 。

五、(本题 15 分) 若两个实数  $a, b$  使得  $a^2 + b$  与  $a + b^2$  都是有理数, 称数对  $(a, b)$  是和谐的。

① 试找出一对无理数, 使得  $(a, b)$  是和谐的;

② 证明: 若  $(a, b)$  是和谐的, 且  $a + b$  是不等于 1 的有理数, 则  $a, b$  都是有理数;

③ 证明: 若  $(a, b)$  是和谐的, 且  $\frac{a}{b}$  是有理数, 则  $a, b$  都是有理数。