市(区)______ 县(区)______ 学校______ 年级______ 姓名______ 性别______ 准考证号______

(密封装订线内不要答题)

2015年全国高中数学联赛
陕西赛区预赛试卷

(4月19日上午　　8:30—11:00)

题　号	一试	二试						总成绩
		一	二	三	四	五	六	
得　分								
评卷人								
复核人								

考生注意:

1. 本试卷分两试.第一试共10小题,满分50分;第二试共6大题,满分100分.
2. 用蓝色(或黑色)钢笔、签字笔或圆珠笔作答.
3. 解题书写不要超过装订线.
4. 不能使用计算器.

第 一 试

得分	评卷人

填空题(每小题5分,共50分)

本题共有10小题,要求直接将答案填在题中的横线上.

1. 已知集合 $A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{2,4,6,8,10\}$,若集合 $C=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in B\}$,则集合 C 中元素的个数是______.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0,x<0,\\1,x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(f(x))=$______.

3. 已知 $\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta=1$,$\cos\alpha+\sqrt{3}\cos\beta=\sqrt{3}$,则 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值为______.

4. 在三棱锥 $S-ABC$ 中,$AB=AC$,$SB=SC$,则直线 SA 与 BC 所成角的大小为______.

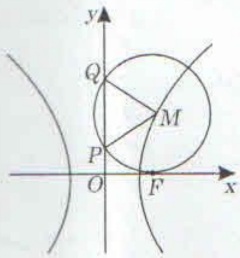

图 1

5. 如图1,以双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 M 为圆心的圆与 x 轴恰好相切于双曲线的一个焦点 F,且与 y 轴交于 P、Q 两点.若 $\triangle MPQ$ 为正三角形,则该双曲线的离心率是______.

6. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,且满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$,则 $\angle ACB=$______.

7. 在 $\triangle ABC$ 中,$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}=1$,则 $\tan\frac{C}{2}$ 的最小值为______.

8. 某人抛掷一枚硬币，出现正面向上和反面向上的概率都是$\frac{1}{2}$. 构造数列$\{a_n\}$，使

$$a_n=\begin{cases}1,\text{第 } n \text{ 次正面向上},\\ -1,\text{第 } n \text{ 次反面向上}.\end{cases}$$

记$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则$S_2\neq0$且$S_8=2$的概率为________.（用最简分数作答）

9. 若正整数m、n满足$\frac{(m+n)!}{n!}=5040$，则$m!\cdot n$的值为______.

10. 设单调递增数列$\{a_n\}$的各项均为正整数，且$a_7=120$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$，则$a_8=$______.

第二试

得分	评卷人

一、（本题满分 15 分）

设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_{n+1}=2S_n+\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）在a_n与a_{n+1}之间插入n个实数，使这$n+2$个数依次组成公差为d_n的等差数列. 设数列$\{\frac{1}{d_n}\}$的前n项和为T_n，求证：$T_n<\frac{5}{4}$，$n\in\mathbf{N}_+$.

得分	评卷人

二、(本题满分 15 分)

设$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c,且满足$\sin A+\sin B=(\cos A+\cos B)\sin C$.

(1)求证:$\triangle ABC$为直角三角形;

(2)若$a+b+c=1+\sqrt{2}$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

得分	评卷人

三、(本题满分 15 分)

如图2,设H为锐角$\triangle ABC$的垂心,过点H且垂直于BH的直线交AB于点D,过点H且垂直于CH的直线交AC于点E,过点C且垂直于BC的直线交直线DE于点F.求证:$FH=FC$.

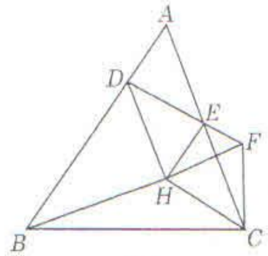

图 2

得分	评卷人

四、(本题满分 15 分)

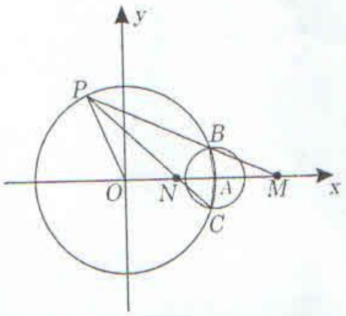

图 3

如图 3,在直角坐标系 xOy 中,圆 $O:x^2+y^2=4$ 与 x 轴的正半轴交于点 A,以 A 为圆心的圆 $A:(x-2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与圆 O 交于 B、C 两点.

(1)求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最小值;

(2)设 P 是圆 O 上异于 B、C 的任一点,直线 PB、PC 与 x 轴分别交于点 M、N,求 $S_{\triangle POM}\cdot S_{\triangle PON}$的最大值.

得分	评卷人

五、(本题满分 20 分)

已知函数$f(x)=x\ln x, g(x)=-x^2+ax-3, a\in \mathbf{R}$.

(1)若对任意$x\in(0,+\infty)$,不等式$f(x)\geqslant \frac{1}{2}g(x)$恒成立,求$a$的取值范围;

(2)证明:对任意$x\in(0,+\infty)$,有$\ln x>\frac{1}{e^x}-\frac{2}{ex}$.

得分	评卷人

六、(本题满分 20 分)

设$[x]$表示不超过实数x的最大整数. 已知$a_k=\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\frac{1}{k^2+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}$, $k=1,2,\cdots$,求和$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{1}{a_k}\right]+\left[\frac{1}{a_k}+\frac{1}{2}\right]\right)$.