2010 年北京市中学生数学竞赛
高一年级初赛试题及参考解答

试　题

一、选择题(满分 36 分)

1. 函数 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位，所得到的图像对应的函数为奇函数，则 φ 的最小值是(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　(C) $\dfrac{\pi}{6}$　(D) $\dfrac{\pi}{8}$

2. $P(a,b)$ 是第一象限内的矩形 $ABCD$ 中(含边界)的一个动点，A、B、C、D 的坐标如图 1 所示. 则 $\dfrac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是(　　).

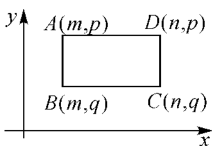

图 1

(A) $\dfrac{q}{m},\dfrac{p}{n}$　(B) $\dfrac{p}{m},\dfrac{q}{n}$

(C) $\dfrac{q}{m},\dfrac{q}{n}$　(D) $\dfrac{p}{m},\dfrac{p}{n}$

3. P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点，满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$. 若 $S_{\triangle ABC}=6$，则 $\triangle PAB$ 的面积等于(　　).

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

4. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$ 且其图像过点 $(2,0)$，则 $\dfrac{f(-1)}{f(1)}$ 的值是(　　).

(A) -3　(B) -2　(C) 2　(D) 3

5. 在 $\triangle ABC$ 中，中线 AD 与中线 BE 垂直相交于 G，则 $\sin C$ 的最大值是(　).

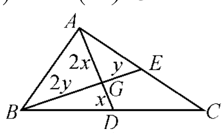

图 2

(A) $\dfrac{2}{5}$　(B) $\dfrac{3}{5}$

(C) $\dfrac{2}{3}$　(D) $\dfrac{4}{5}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}f(-x)=4x$，则 $f(2)\times f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 的值等于(　　).

(A) 31.5　(B) 30.5

(C) -30.5　(D) -31.5

二、填空题(满分 64 分，每小题 8 分)

1. 已知函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域为 D，值域为 $\{-1,0,1,3\}$，试确定这样的集合 D 最多有多少个.

2. 求

$$\frac{\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\log_2\frac{4}{5}+\log_2\frac{5}{6}+\log_2\frac{6}{7}+\log_2\frac{7}{8}}{\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7}$$

的值.

3. 在长方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 上一点，$AB=14$，$CE=13$，$DE=15$. $CF\perp DE$ 于 F，连接 AF，BF. 求 $\triangle ABF$ 的面积.

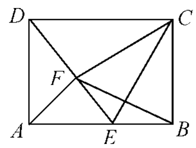

图 3

4. 在同一个直角坐标系中，如果直线 $y=kx$ 与函数 $y=\begin{cases}2x+4 & (x<-3)\\ -2 & (-3\leqslant x\leqslant 3)\\ 2x-8 & (x>3)\end{cases}$ 的图像恰有 3 个不同的交点. 试确定 k 的取值范围.

5. P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且满足 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，试确定 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 的面积之比.

6. 如图 5，凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD+\angle ADC=240^\circ$，$E$ 和 F 分别是边 AD、BC 的中点，$EF=\sqrt{7}$ 厘米，若以 AB、CD 为边分别画两个正方形 A_1 和 A_2，再画一个长度和宽度分别等于 AB、CD 的长方形 A_3. 求所画的三个图形 A_1、A_2 和 A_3 的面积之和是多少平方厘米.

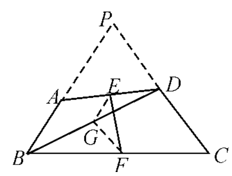

图 5

7. 试确定 $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$ 的值.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=100^\circ$，$\angle ACB=65^\circ$，在 AB 边上取点 M，使得 $\angle MCB=55^\circ$，在 AC 边上取点 N，使得 $\angle NBC=80^\circ$. 试确定 $\angle NMC$

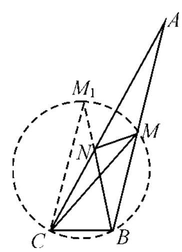

图 6

的度数.

参考解答

一. 选择题

1. 答:(C).

理由　函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{2})$ 的图像向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位, 所得到的图像对应的函数为 $y=2\sin[3(x+\varphi)-\frac{\pi}{2}]=y=2\sin[3x+(3\varphi-\frac{\pi}{2})]$, 而已知这个函数是奇函数, 其必要条件是在 0 点的函数值为 0, 即 $3\varphi-\frac{\pi}{2}=k\pi$, 所以 φ 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$.

2. 答:(B).

理由　$\frac{b}{a}$ 为直线 OP 的斜率, 其最小值为 OC 的斜率, 其最大值为 OA 的斜率, 所以 $\frac{b}{a}$ 的最大值为 $\frac{p}{m}$, 最小值为 $\frac{q}{n}$.

3. 答:(C).

理由　在 $\triangle ABC$ 所在平面上取一点 O,

$\because$　$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}=2\vec{AB}$,

$\therefore$　$\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}-3\vec{OP}=2\vec{OB}-2\vec{OA}$,

$\therefore$　$3(\vec{OA}-\vec{OP})=\vec{OB}-\vec{OC}$,

即　$3\vec{PA}=\vec{CB}$.

$\therefore$　$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=2$.

4. 答:选(A).

理由　因为二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$ 且其图像过点 $(2,0)$, 所以曲线过点 $(0,0)$, 因此 $c=f(0)=0$, 于是 $f(x)=ax^2+bx$, 得 $f(1)=a+b$, $f(-1)=a-b$.

又图形对称轴为 $x=1$, 则 $\frac{-b}{2a}=1$,

即 $\frac{b}{a}=-2$. 所以 $\frac{f(-1)}{f(1)}=\frac{a-b}{a+b}=-3$.

5. 答:(B).

解　在 $\triangle ABC$ 中, 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $GD=x$, $GE=y$, 所以 $GA=2x$, $GB=2y$.

分别在直角 $\triangle AGB$、直角 $\triangle AGE$ 和直角 $\triangle BGD$ 中应用勾股定理, 得 $4x^2+4y^2=c^2$,

$$4x^2+y^2=\frac{b^2}{4},\quad x^2+4y^2=\frac{a^2}{4}.$$

三式相加得出　$c^2=\frac{a^2+b^2}{5}$.

由余弦定理, 得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5c^2-c^2}{2ab}=\frac{4c^2}{2ab}\geqslant\frac{4c^2}{a^2+b^2}=\frac{4c^2}{5c^2}=\frac{4}{5}.$$

又 $\angle C$ 是锐角, 所以

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}\leqslant\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}.$$

6. 答:(D).

理由　把 $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$ 分别代入 $f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}f(-x)=4x$, 得

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}f(2)=-8, \\ f(2)+2f(-\frac{1}{2})=2. \end{cases}$$

解之得 $f(2)=9$, $f(-\frac{1}{2})=-\frac{7}{2}$,

故 $f(2)\times f(-\frac{1}{2})=9\times(-\frac{7}{2})=-31.5$.

二. 填空题

1. 答: 27.

解　$\because$　$f(0)=-1$, $\begin{cases} f(1)=0, \\ f(-1)=0, \end{cases}$

$\begin{cases} f(\sqrt{2})=1, \\ f(-\sqrt{2})=1, \end{cases}$ $\begin{cases} f(2)=3, \\ f(-2)=3, \end{cases}$

$\therefore$ $0\in D$; -1, 1 至少一个属于 D; $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 至少一个属于 D; -2, 2 至少一个属于 D. 于是, 这样的 D 共有 $3\times3\times3=27$ 个.

2. 答: -6.

解

$$\frac{\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\log_2\frac{4}{5}+\log_2\frac{5}{6}+\log_2\frac{6}{7}+\log_2\frac{7}{8}}{\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7}$$

$$=\frac{\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\right)}{\frac{\lg2}{\lg3}\cdot\frac{\lg3}{\lg4}\cdot\frac{\lg4}{\lg5}\cdot\frac{\lg5}{\lg6}\cdot\frac{\lg6}{\lg7}\cdot\frac{\lg7}{\lg8}}=\frac{\log_2\left(\frac{2}{8}\right)}{\frac{\lg2}{\lg8}}$$

$$=\frac{\log_2 2^{-2}}{\frac{\lg2}{3\lg2}}=\frac{-2}{\frac{1}{3}}=-6.$$

3. 答: 36.96.

解　先求 BE. 设 $BE=x$, 则 $AE=14-x$, 在直角 $\triangle ADE$ 与直角 $\triangle BCE$ 中应用勾股定理, 得 $DE^2-AE^2=AD^2=BC^2=CE^2-BE^2$, 即得方程 $15^2-(14-x)^2=13^2-x^2$, 所以 $x=5$.

再应用勾股定理, 得 $AD=BC=13^2-x^2=12$. $S_{ABCD}=12\times14=168$, 所以 $S_{\triangle CDE}=84$.

设 $DF=y$，则 $EF=15-y$，在直角△CDF 与直角△CEF 中应用勾股定理，得 $CD^2-DF^2=CF^2=CE^2-EF^2$，即得方程 $14^2-y^2=13^2-(15-y)^2$，所以 $y=8.4$.

因此，$S_{\triangle CDF}=84\times\dfrac{8.4}{15}=28\dfrac{8.4}{5}=47.04$.

又由于 $S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ABF}=\dfrac{1}{2}S_{ABCD}=84$，

所以 $S_{\triangle ABF}=84-S_{\triangle CDF}=84-47.04=36.96$.

4. 答：$\left(\dfrac{2}{3},2\right)$.

解　在坐标系中画出函数 $y=\begin{cases}2x+4 & (x<-3)\\ -2 & (-3\leqslant x\leqslant 3)\\ 2x-8 & (x>3)\end{cases}$ 的草图，即图中的粗黑折线.

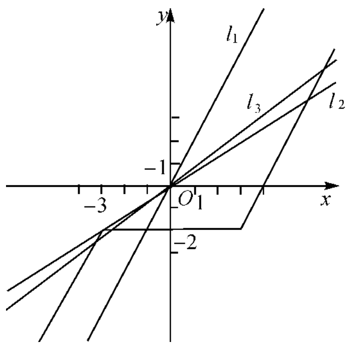

图 4

直线 l_1：$y=2x$ 与该折线只有 1 个公共点，

直线 l_2：$y=\dfrac{2}{3}x$ 与该折线只有 2 个公共点，

对于过原点的直线，当由 l_2 逆时针旋转到 l_1 时，即当且仅当斜率 k 满足 $\dfrac{2}{3}<k<2$ 时，直线 l_3：$y=kx$ 与该折线恰有 3 个交点.

5. 答：6∶2∶3.

解　如图，分别在 PA、PB、PC 的延长线上取点 A_1，B_1，C_1，使 $\overrightarrow{PA_1}=2\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB_1}=3\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC_1}=6\overrightarrow{PC}$，则 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}=\vec{0}$.

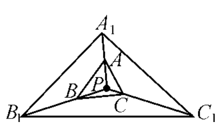

图 7

∴　P 为△$A_1B_1C_1$ 的重心，

∴　$S_{\triangle PA_1B_1}=S_{\triangle PB_1C_1}=S_{\triangle PC_1A_1}$.

∵　$S_{\triangle PAB}=\dfrac{S_{\triangle PA_1B_1}}{2\times3}$，　$S_{\triangle PBC}=\dfrac{S_{\triangle PB_1C_1}}{3\times6}$，

$S_{\triangle PCA}=\dfrac{S_{\triangle PC_1A_1}}{6\times2}$，

∴　$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}=6:2:3$.

6. 答：28.

解　延长 BA、CD 相交于点 P，由 $\angle BAD+\angle ADC=240°$，得 $\angle BPC=60°$.

连接 BD，取 BD 的中点 G，连接 EG，FG，则由三角形中位线定理，知 $GE\parallel BP$，$GF\parallel PC$，所以 $\angle EGF=120°$，$EG=\dfrac{1}{2}AB$，$FG=\dfrac{1}{2}CD$.

在△EGF 中，由余弦定理得

$$EF^2=EG^2+FG^2-2EG\cdot FG\cos120°=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)\left(\frac{CD}{2}\right),$$

即 $\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2+\left(\dfrac{CD}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)\left(\dfrac{CD}{2}\right)=EF^2=\left(\sqrt{7}\right)^2=7$.

所以 $AB^2+CD^2+AB\times CD=4\times7=28$.

即三个图形 A_1、A_2 和 A_3 的面积之和是 28 平方厘米.

7. 答：$\dfrac{3}{2}$.

解　$\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$

$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\left(\pi-\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}$$

$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}+\left(\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}\right)^2-2\sin^2\frac{5\pi}{8}\cos^2\frac{5\pi}{8}$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{8}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{10\pi}{8}\right)^2$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)^2$$

$$=2-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$=2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

8. 答：25°.

解　易知 $\angle BAC=15°$，作△MCB 的外接圆，与 BN 的延长线交于点 M_1，则在这个圆中弦 CM_1 与 CM 对的圆周角互补，所以 $CM_1=CM$.

又 $\angle M_1CM=\angle M_1BM=100°-80°=20°$，$\angle ACM=65°-55°=10°$，所以 $\angle M_1CN=10°$；

又 $CN=CN$，所以△$M_1CN\cong$△MCN.

因此，$\angle NMC=\angle NM_1C=\angle CMB=\angle BAC+\angle ACM=15°+10°=25°$.

（北京数学会普及委员会提供）