6-1

局部调整法

张小明编

一、任意两个自变量之间的调整

在中学数学竞赛中，局部调整法（又称磨光法）是证明不等式常用的手段与技巧，它主要指以下定理.

定理 设D是$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$上的对称凸域，在D上的连续对称函数$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$满足:对任意的$\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$都有

$$f\left(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\right)\ge f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},x_3,\cdots,x_n\right),$$

则必有$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\ge f\left(\frac{m}{n},\frac{m}{n},\cdots,\frac{m}{n}\right)$.

比如著名的公式：$a,b\in R$，$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，可以理解成$\frac{a^2+b^2}{2}\ge\frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}$.

例1 已知$n\ge2,n\in N,x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)\ge0$，求证：$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

证明 $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\ge\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+x_3\cdots+x_n}{n}-\sqrt[n]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x_3\cdots x_n}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[n]{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\cdot x_3\cdots x_n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\Leftrightarrow\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\ge x_1x_2$$

成立，所以无限次调整下去，左边减去右边会越来越小，直至所有的$x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$都相等，此时左边减右边为0，所以原命题成立.

例2 设a,b,c,d为正数，$a+b+c+d=1$，求证

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(d+\frac{1}{d}\right)\ge\left(\frac{17}{4}\right)^4.$$

证明 首先我们证明

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\ge\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2 \qquad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{1}{ab}-\frac{\left(a+b\right)^2}{4}-\frac{4}{\left(a+b\right)^2}-2\ge0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\left[4\left(a+b\right)^2+4-ab\left(a+b\right)^2\right]\ge0.$$

由于$0<a,b<1$，上式为真，所以（3.1）式为真，由局部调整法知

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\left(d+\frac{1}{d}\right)\ge\left(\frac{a+b+c+d}{4}+\frac{4}{a+b+c+d}\right)^4=\left(\frac{17}{4}\right)^4.$$

例3 设a,b,c为正数，求证$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\ge\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3$.

证明 因$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\ge\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge2$成立，所以我们有

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\ge\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2\left(c+\frac{1}{c}\right).$$

下面继续调整$\sqrt{ab}$和c反复调整其中的两个变量，直至无穷，有极限知识知，

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)\ge\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3=8.$$

例 4 $a,b,c>0$，求证：$\frac{63}{2}+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{abc}\ge\frac{27}{2}\cdot\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$.

证明 由于欲证不等式为齐次不等式，所以不妨设$abc=1$. 设

$$f(a,b,c)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-\frac{27}{2}(a+b+c)+\frac{63}{2}.$$

我们有

$$f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-\frac{27}{2}(a+b+c)-(a+2\sqrt{bc})(a^2+2bc)+\frac{27}{2}(a+2\sqrt{bc})$$

$$=a(b-c)^2+a^2\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+(b+c)(b^2+c^2)-4bc\sqrt{bc}-\frac{27}{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left((b+c+\sqrt{bc})^2+bc+a(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2+a^2-\frac{27}{2}\right)$$

$$\ge\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(10bc+4a\sqrt{bc}+a^2-\frac{27}{2}\right)=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(\frac{10}{a}+4\sqrt{a}+a^2-\frac{27}{2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(\frac{10}{3a}+\frac{10}{3a}+\frac{10}{3a}+2\sqrt{a}+2\sqrt{a}+a^2-\frac{27}{2}\right)$$

$$\ge\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(6\sqrt[6]{\frac{10}{3a}\cdot\frac{10}{3a}\cdot\frac{10}{3a}\cdot2\sqrt{a}\cdot2\sqrt{a}\cdot a^2}-\frac{27}{2}\right)\ge\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(6\sqrt[6]{\frac{4000}{27}}-\frac{27}{2}\right)\ge0.$$

下面继续调整$\sqrt{bc}$和a反复调整其中的两个变量，直至无穷，有极限知识知

$$f(a,b,c)\ge f\left(\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc},\sqrt[3]{abc}\right)=f(1,1,1)=8.$$

注 1：证明后半部分，也可直接证 $f\left(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc}\right)\ge0$. 若令$\sqrt{bc}=t,a=\frac{1}{t^2}$，只要证

$$\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)\left(\frac{1}{t^4}+2t^2\right)-\frac{27}{2}\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)+\frac{63}{2}\ge0$$

$$(t-1)^2(8t^7+16t^6-30t^5-9t^4+12t^3+6t^2+4t+2)\ge0.$$

此时易由

$$16t^6+8t^3=8t^6+8t^6+8t^3\ge3\sqrt[3]{8t^6\cdot8t^6\cdot8t^3}=24t^5,3t^7+3t^3\ge6t^5,t^7+4t\ge4t^4$$

$4t^7+t^3+6t^2+1=2t^7+t^7+t^7+t^3+3t^2+3t^2+1\ge7\sqrt[7]{2t^7\cdot t^7\cdot t^7\cdot t^3\cdot3t^2\cdot3t^2\cdot1}=7\sqrt[7]{18}t^4\ge5t^4$. 知结论成立.

注 2：采取后者证明时，还可以不妨设$t\ge1$. 此时

$$8t^7+16t^6-30t^5-9t^4+12t^3+6t^2+4t+2=(t-1)(8t^6+24t^5-6t^4-15t^3-3t^2+3t+7)+9$$

$$=(t-1)\left[(t-1)(8t^5+32t^4+26t^3+11t^2+8t+11)+18\right]+9\ge0$$

为明显. 为此，我们介绍下一节内容.

例 5 在三角形Δ ABC 中，求证：$\sum \sin B \sin C \cos \frac{A}{2} \le \frac{9\sqrt{3}}{8}$.

证明 设 $f(A,B,C) = \sum \sin B \sin C \cos \frac{A}{2}$，则

$$f(A,B,C) = \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}[\cos(B-C)+\cos(B+C)] + 2\sin A\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}(\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}[\cos(B-C)+\cos(B+C)] + 2\sin A(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2})\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\cos(B-C) + \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\cos(B+C) + 2\sin A\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$+2\sin A\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{B-C}{2}$$

和

$$f(A,B,C) - f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})$$

$$= \frac{1}{2}\cos\frac{A}{2}\left(\cos(B-C)-1\right) + 2\sin A\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{4}\left(\cos\frac{B-C}{4}-1\right)$$

$$+2\sin A\sin\frac{B+C}{4}\left(\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{B-C}{2}-1\right)$$

≤ 0.

所以不断地对 $f(A,B,C)$ 中三个变量进行局部调整法，函数值越来越小，直至

$$f(A,B,C) \le f(60^0, 60^0, 60^0) = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

二、两个特定变量之间的调整

1、在最大值与最小值之间进行的局部调整法

例 6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$，$a_1 a_2 \cdots a_n = 1$，求证：

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \ge n+1.$$

证明 由于对称性，不妨设 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$，且设

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - n - 1.$$

则

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) - f(\sqrt{a_1 a_n}, a_2, \cdots, a_{n-1}, \sqrt{a_1 a_n})$$

$$= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} - \frac{2}{\sqrt{a_1 a_n}} + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} - \frac{n}{2\sqrt{a_1 a_n} + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}\right)^2 \left[(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(2\sqrt{a_1 a_n} + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - n a_1 a_n\right]}{a_1 a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(2\sqrt{a_1 a_n} + a_2 + \cdots + a_{n-1})}$$

$$\ge \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}\right)^2 \left[((n-1)a_1 + a_n)(2\sqrt{a_1 a_n} + (n-2)a_1) - n a_1 a_n\right]}{a_1 a_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(2\sqrt{a_1 a_n} + a_2 + \cdots + a_{n-1})}$$

$$\geq \frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1}\right)^2\left[a_n(2\sqrt{a_1a_n}+(n-2)a_1)-na_1a_n\right]}{a_1a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)(2\sqrt{a_1a_n}+a_2+\cdots+a_{n-1})}\geq 0.$$

此类调整都在自变量的最大值和最小值之间进行，直到它们都调整到它们的几何平均 1.所以 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geq f(1,1,\cdots,1)=0$. 结论得证.

2、自变量最小（大）值不参与的局部调整法

例 7 设 $a,b,c>0$，求证：$a+b+c+3\sqrt[3]{abc}\geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)$.

证明 设 $a\leq b\leq c$，和 $f(a,b,c)=a+b+c+3\sqrt[3]{abc}-2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\right)$，则

$$f(a,b,c)-f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})=b+c-2\sqrt{bc}-2\sqrt{a}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-2\sqrt{\sqrt{bc}}\right)$$

$$=\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{c}\right)^2\left[\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\right)^2-2\sqrt{a}\right]\geq\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{c}\right)^2\left[4\sqrt{a}-2\sqrt{a}\right]>0.$$

下再证 $f(a,\sqrt{bc},\sqrt{bc})\geq 0$，若设 $t=\sqrt{bc}\geq a$，只要证

$$a+3\sqrt[3]{at^2}-4\sqrt{at}\geq 0\text{（令 }t/a=s^6\geq 1,s\geq 1\text{）}\Leftrightarrow 1+3s^4-4s^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (s-1)^2(3s^2+2s+1)\geq 0.$$

例 8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，$a_1a_2\cdots a_n=1$，求证：

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\geq n+2.$$

证明 由于对称性，不妨设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，且设

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-n-2.$$

则

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_n)-f(\sqrt{a_1a_{n-1}},a_2,\cdots a_{n-2},\sqrt{a_1a_{n-1}},a_n)$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{a_1a_{n-1}}}+\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}-\frac{2n}{2\sqrt{a_1a_{n-1}}+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_1}\right)^2\left[(a_1+a_2+\cdots+a_n)(2\sqrt{a_1a_{n-1}}+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n)-2na_1a_{n-1}\right]}{a_1a_{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(2\sqrt{a_1a_{n-1}}+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_1}\right)^2\left[((n-2)a_1+2a_{n-1})(2\sqrt{a_1a_{n-1}}+(n-3)a_1+a_{n-1})-2na_1a_{n-1}\right]}{a_1a_{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(2\sqrt{a_1a_{n-1}}+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n)}$$

$$\geq\frac{(n-2)a_{n-1}a_1\left(\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_1}\right)^2}{a_1a_{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(2\sqrt{a_1a_{n-1}}+a_2+\cdots+a_{n-2}+a_n)}\geq 0$$

除了自变量的最大值外，此类调整在其余 $n-1$ 个量进行，直到它们的几何平均 $1/t$，此时自变量的最大值为 $t^{n-1}(t\geq 1)$.下面只要证 $f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{t},\cdots,\frac{1}{t},t^{n-1}\right)\geq 0$ 即可.

$$(n-1)t+\frac{1}{t^{n-1}}+\frac{2n}{\frac{n-1}{t}+t^{n-1}}-n-2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(t)\overset{Def.}{=}(n-1)t^{2n}-(n+2)t^{2n-1}+\left(n^2+2\right)t^n-\left(n^2+n-2\right)t^{n-1}+n-1\geq 0.\text{（*）}$$

此时

$$g'(t)=t^{n-2}\left[2n(n-1)t^{n+1}-(n+2)(2n-1)t^{n}+n\left(n^{2}+2\right)t-\left(n^{2}+n-2\right)(n-1)\right],$$

$$\left(\frac{g'(t)}{t^{n-2}}\right)'=n\left[2(n-1)(n+1)t^{n}-(n+2)(2n-1)t^{n-1}+\left(n^{2}+2\right)\right]$$

$$=n\left[\overbrace{2(n+1)t^{n}+2(n+1)t^{n}+\cdots+2(n+1)t^{n}}^{n-1}+\left(n^{2}+2\right)-(n+2)(2n-1)t^{n-1}\right]$$

$$\geq n\left[n\sqrt[n]{2^{n-1}(n+1)^{n-1}t^{n(n-1)}\cdot\left(n^{2}+2\right)}-(n+2)(2n-1)t^{n-1}\right]$$

$$\geq nt^{n-1}\left[n\sqrt[n]{2^{n-1}(n+1)^{n-1}\left(n^{2}+2\right)}-(n+2)(2n-1)\right]\geq 0.$$

所以$\dfrac{g'(t)}{t^{n-2}}$为单调增加函数，$\dfrac{g'(t)}{t^{n-2}}\geq\dfrac{g'(1)}{1^{n-2}}=0$，$g(t)$为单调增加函数，$g(t)\geq g(1)=0$，此即为（*）式.

例 9 设$x,y,z,t\geq 0,x+y+z+t=4$，求证：

$$(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t)\leq 130+126xyzt.$$

证明 不妨设$x\geq z\geq y\geq t$，和

$$f(x,y,z,t)=130+126xyzt-(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t).$$

此时$z+t\leq 2,zt\leq 1$和

$$f(x,y,z,t)-f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z,t\right)=126xyzt-126\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2}zt$$

$$-(1+3x)(1+3y)(1+3z)(1+3t)+(1+3\cdot\frac{x+y}{2})(1+3\cdot\frac{x+y}{2})(1+3z)(1+3t)$$

$$=\frac{(x-y)^{2}}{4}\left[9(1+3z)(1+3t)-126zt\right]=\frac{(x-y)^{2}}{4}\left[9+27(z+t)-45zt\right]$$

$$=\frac{(x-y)^{2}}{4}\left[9+27(z+t)-45zt\right]\geq\frac{(x-y)^{2}}{4}\left[9+54\sqrt{zt}-45zt\right]$$

$$\geq\frac{(x-y)^{2}}{4}\left[9+54zt-45zt\right]\geq 0.$$

反复调整 4 个自变量中的最大值、第二大的值和第三大的值，直至它们的几何平均，此时$x=y=z=\dfrac{4-t}{3}$.

下证$f\left(\dfrac{4-t}{3},\dfrac{4-t}{3},\dfrac{4-t}{3},t\right)\geq 0$. 即

$$130+126\left(\frac{4-t}{3}\right)^{3}t-\left(1+3\cdot\frac{4-t}{3}\right)^{3}(1+3t)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 15-4t-42t^{2}+36t^{3}-5t^{4}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-t)^{2}(15+26t-5t^{2})\geq 0.$$

上式对于$0<t\leq 1$显然为真.

例 10（2005 年高中数学联赛试题）在ΔABC中，求证：$\dfrac{\cos^{2}A}{1+\cos A}+\dfrac{\cos^{2}B}{1+\cos B}+\dfrac{\cos^{2}C}{1+\cos C}\geq\dfrac{1}{2}$.

证明 不妨设 A 是最小内角，左边 $=f(A,B,C)=\dfrac{\cos^2 A-1+1}{1+\cos A}+\dfrac{\cos^2 B-1+1}{1+\cos B}+\dfrac{\cos^2 C-1+1}{1+\cos C}$

$$=\cos A+\frac{1}{1+\cos A}+\cos B+\frac{1}{1+\cos B}+\cos C+\frac{1}{1+\cos C}-3$$

$$=\cos A+\frac{1}{1+\cos A}+2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}+\frac{2+2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{4\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{C}{2}}-3$$

$$=\cos A+\frac{1}{1+\cos A}+2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}+\frac{2+2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}-3.$$

所以

$$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)+\left[\frac{2+2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}-\frac{2}{\sin\frac{A}{2}+1}\right]$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-1\right)+\frac{\left(2+2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)-2\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}$$

$$=2\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{\sin\frac{A}{2}+1+\cos\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}-\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$=2\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)}+\frac{1-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)^2}-\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$\geq 2\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\left[\frac{1}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)^2}+\frac{1-\sin^2\frac{A}{2}}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)^3}-\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$\geq 2\left(1-\cos\frac{B-C}{2}\right)\frac{2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\sin\frac{A}{2}+1\right)^3}\geq 0.$$

下证 $f\left(A,\dfrac{B+C}{2},\dfrac{B+C}{2}\right)=f\left(A,\dfrac{\pi-A}{2},\dfrac{\pi-A}{2}\right)\geq\dfrac{1}{2}$. 若设 $x=\sin\dfrac{A}{2}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，即只要证

$$\cos A+\frac{1}{1+\cos A}+2\sin\frac{A}{2}+\frac{2}{1+\sin\dfrac{A}{2}}\geq\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-2x^2+\frac{1}{2-2x^2}+2x+\frac{2}{1+x}\geq\frac{7}{2}\Leftrightarrow x^2(1-4x+4x^2)\geq 0.$$

至此结论得证.

3、其它情形的局部调整法

例 11 $a,b,c\geq 0$，$a+b+c=1$，求证：$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geq 2$.

证明 设 $f(a,b,c)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$. 先证 $f(a,b,c)\geq f(0,a+b,c)$，其等价于

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geq(1-0)^2+(1-(a+b)^2)^2+(1-c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 1\geq a^2+\frac{3}{2}ab+b^2.$$

由 $1=(a+b+c)^2\geq(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 知上式为真.

此时 $f(a,b,c)\geq f(0,a+b,c)=f(c,a+b,0)\geq f(0,a+b+c,0)=2$. 证毕.

例 12

已知a、b、c、d $\in R^+$，求证：$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)+32abcd\geq 3(a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$。

证明：根据齐次性，不妨设 $a+b+c+d=1$，则

$(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)+32abcd\geq 3(a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+d^3+32abcd-3(abc+bcd+cda+dab)\geq 0$

根据对称性，不妨设 $a\geq b\geq c\geq d$，则 $c+d\leq\frac{1}{2}$，根据均值不等式知 $cd\leq\frac{1}{16}$。

令 $f(a,b,c,d)=a^3+b^3+c^3+d^3+32abcd-3(abc+bcd+cda+dab)$，则

$f(a,b,c,d)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)$

$=\left[a^3+b^3-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right]+32\left[abcd-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2cd\right]-3\left[ab(c+d)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(c+d)\right]$

$=\frac{3}{4}(a+b)(a-b)^2-8cd(a-b)^2+\frac{3}{4}(c+d)(a-b)^2$

$=\frac{3}{4}(a+b+c+d)(a-b)^2-8cd(a-b)^2$

$=8\left(\frac{3}{32}-cd\right)(a-b)^2\geq 0$

此时 $\dfrac{a+b}{2}+d\leq\dfrac{1}{2}$，所以可以继续调整 $\dfrac{a+b}{2}$ 和 c 至 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}+c\right)$，反复如此，只要证 $f(t,t,t,1-3t)\geq 0$，其中 $0<t<1$. 其等价于 $3t^3+(1-3t)^3+32t^3(1-3t)-3[t^3+3t^2(1-3t)]\geq 0$

$$\Leftrightarrow 32t^3-6t+1\geq 0\Leftrightarrow(4t-1)^2(2t+1)\geq 0.$$

至此知结论成立

例 13（1999 年罗马尼亚国家队考试题） 已知正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$，求证：

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leq 1.$$

证明 先证下结论（1）和（2）.

（1）若两个数 x,y 都 $\geq n-1$ 时，有

$$\frac{1}{n-1+x}+\frac{1}{n-1+y}\le\frac{1}{n-1+n-1}+\frac{1}{n-1+\frac{xy}{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(n-1-x)(n-1-y)}{(2n-2)\left((n-1)^2+xy\right)(n-1+x)(n-1+y)}\left[xy-(n-1)^2\right]\ge 0.$$

（2）若两个数 x,y 都 $\le n-1$，则有

$$\frac{1}{n-1+x}+\frac{1}{n-1+y}\le\frac{2}{n-1+\sqrt{xy}}\Leftrightarrow xy\le(n-1)^2.$$

设 $A=\{x_i,x_i>n-1\}$ 和 $B=\{x_i,x_i\le n-1\}$. 若集合 A 是空集，则由结论 2 知，对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 量都可以逐步两两调整到它们的几何平均 1. 结论为显然. 若 A 的元素多于 1 个时，设 $x_{i_1},x_{i_2},\cdots.x_{i_t}$. 由结论 1 知，可以把它们调整到有 $t-1$ 个 $n-1$ 和一个 $\frac{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}}{(n-1)^{t-1}}$. 此时 A 的元素为 1 个，B 中的元素为 $n-1$ 个. 后者可以继续调整到它们的几何平均.

至此，只要证 $\frac{1}{s},\frac{1}{s},\cdots,\frac{1}{s},s^{n-1}$ 的情形，其中 $s^{n-1}>n-1$，即只要证

$$\frac{n-1}{n-1+1/s}+\frac{1}{n-1+s^{n-1}}\le 1\Leftrightarrow s^{n-1}-(n-1)s+n-2\ge 0.$$

由于左边关于 s 单调且能在 $s=1$ 取等，所以结论得证.

三、求最值

例 13 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$ 为正的自然数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=2013$，求 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2$ 的最小值与最大值.

解： 对于任意两个 x_i,x_j，当 $x_i-x_j\ge 2$ 时，为了记述上的方便，不妨设 $x_1-x_2\ge 2$. 令 $x_1\to x_1-1,x_2\to x_2+1$ 时，前后的值差为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_{100}^2-\left[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2+x_3^2\cdots+x_{100}^2\right]$$
$$=x_1^2+x_2^2-\left[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2\right]=2(x_1-x_2)-2\ge 2.$$

所以自变量原差距大于等于 2 时，当作缩小差距变换时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2$ 在减少.

当 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2$ 最小时，自变量差距必都小于等于 1. 即 $x_i\ (i=1,2,\cdots,100)$ 中有 87 个 20 和 13 个 21. 此时 $\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2\right)_{\min}=87\times 20^2+13\times 21^2=40533$.

反之，把变量“集中”一数时，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2$ 最大，此时 $x_i\ (i=1,2,\cdots,100)$ 中有 99 个 1 和 1 个 1014. $\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2\right)_{\max}=99\times 1^2+1014^2=1028295$.

例 14 对于满足条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$ 的非负数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，求 $\sum_{i=1}^{n}(x_i^4-x_i^5)$ 的最大值.

解 先证引理：若 $x,y>0,x+y<\frac{7}{10}$，则有 $(x+y)^4-(x+y)^5>x^4-x^5+y^4-y^5$. 等价于

$$4x^2+6xy+4y^2-(5x^3+10x^2y+10xy^2+5y^3)>0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+6xy+4y^2-5(x+y)(x^2+xy+y^2)>0$$
$$\Leftarrow 8x^2+12xy+8y^2-7(x^2+xy+y^2)>0$$
$$\Leftarrow x^2+5xy+y^2>0.$$

引理得证.

若$n\ge 3$，必有两个数的和小于$\dfrac{7}{10}$，这样把它们“拼”成一个数，最后拼好后，还省两个数. 所以欲求最大值，只要考虑$x,y\ge 0,x+y=1$，此时

$$\begin{aligned}x^4-x^5+y^4-y^5&=x^4-x^5+(1-x)^4-(1-x)^5\\&=x-4x^2+6x^3-3x^4.\end{aligned}$$

$$\left(x-4x^2+6x^3-3x^4\right)'=1-8x+18x^2-12x^3=6(1-2x)\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right).$$

所以当$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},y=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$及其交换时，$x^4-x^5+y^4-y^5$取到最大值$\dfrac{1}{12}$.

例 15 空间有 2003 个点，其中任何三点不共线，把它们分成点数各不相同的 30 组，在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形，问要使这种三角形的总数为最大，各组的点数应为多少？

解 设分成的 30 组的点数分别是$n_1,n_2,\cdots,n_{30}$，其中$n_i\,(i=1,2,\cdots,30)$互不相等，则满足题设的三角形的总数为$S=\sum\limits_{1\le i<j<k\le 30}n_in_jn_k$.不妨设$n_1<n_2<\cdots<n_{30}$.

（1）在$n_1,n_2,\cdots,n_{30}$中，让n_1,n_2变化，其余各组的点数不变，因为n_1+n_2的值不变，注意到$S=n_1n_2\sum\limits_{3\le k\le 30}n_k+(n_1+n_2)\sum\limits_{3\le j<k\le 30}n_jn_k+\sum\limits_{3\le i<j<k\le 30}n_in_jn_k$ ①，要使S的值最大，只需n_1n_2的值最大.如果$n_2-n_1\ge 3$，令$n_1'=n_1+1$，$n_2'=n_2-1$,则$n_1'+n_2'=n_1+n_2$，
$n_1'n_2'=(n_1+1)(n_2-1)=n_1n_2+n_2-n_1-1>n_1n_2$，$S$的值变大.因此要使$S$的值最大，对任何$1\le i\le 29$都有$n_{i+1}-n_i\le 2$.

（2）若$n_1,n_2,\cdots,n_{30}$中，使$n_{i+1}-n_i=2$（$1\le i\le 29$）的i的值不少于 2 个，不妨设
$1\le i<j\le 29,n_{i+1}-n_i=2,n_{j+1}-n_j=2$.类似（1），令$n_i'=n_i+1,n_{j+1}'=n_{j+1}-1$，其余各组的点数不变，则$S$的值变大.因此要使$S$的值最大，至多有一个$i$使$n_{i+1}-n_i=2$.

（3）若对任何$1\le i\le 29$，$n_{i+1}-n_i=1$.设这 30 组的点数分别是$m-14,m-13,\cdots,m+15$，则$30m+15=2003$，这是不可能的.

综上，要使S的值最大，对任何$1\le i\le 29$在$n_{i+1}-n_i$中恰有一个为 2，其余均为 1.设这 30 组的点数分别是$m,m+1,\cdots,m+t-1,m+t+1,\cdots,m+30$（$1\le t\le 29$)，则
$m+(m+1)+\cdots+(m+t-1)+(m+t+1)+\cdots+(m+30)=2003$，
即$30m+465-t=2003$，解得$m=52,t=22$.所以当分成的 30 组的点数分别是 52，53，…，73，75，…，82 时，能使三角形的总数最大.

四、调整思想应用

例 16 给定 100 个实数$x_i(1\le i\le 100)$，$x_1+x_2+\cdots+x_{100}=1$，且$|x_i-x_{i+1}|<\dfrac{1}{50}(1\le i\le 99)$，证明：可以选出其中的 50 个数，使得它们的和与$\dfrac{1}{2}$的差不超过$\dfrac{1}{100}$.

证明 考虑$x_1+x_2+\cdots+x_{50}$，若它满足题意，则证毕.不然不妨设$x_1+x_2+\cdots+x_{50}<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{100}$和$x_{51}+x_{52}+\cdots+x_{100}>\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{100}$，下面考虑变化

$$x_1+x_2+\cdots+x_{50}\to x_2+\cdots+x_{50}+x_{51},$$

$$x_2+\cdots+x_{50}+x_{51}\to x_3+\cdots+x_{50}+x_{52},$$

$$\cdots$$

$$x_{50}+\cdots+x_{50}+x_{99}\to x_{51}+\cdots+x_{99}+x_{100}.$$

每一个变化的差距都小于$\dfrac{1}{50}$，$x_1+x_2+\cdots+x_{50}$如何变化到$x_{51}+x_{52}+\cdots+x_{100}$呢？即点中如何从区间$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{100}\right)$“跳”到$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{100},+\infty\right)$，则易知以上 51 个数必有其中的一个数落在区间$\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{100},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{100}\right]$，证毕.

例 17、设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是满足下列条件的实数：$\left|x_1+x_2+\cdots+x_n\right|=1$且$\left|x_i\right|\le\dfrac{n+1}{2},i=1,2,\cdots,n$. 求证：存在$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一个排列$y_1,y_2,\cdots,y_n$，使得

$$\left|y_1+2y_2+\cdots+ny_n\right|\le\frac{n+1}{2}.$$

证明：用反证法，若不然，对于任何排列都有$\left|y_1+2y_2+\cdots+ny_n\right|>\dfrac{n+1}{2}$. 现对的$y_1,y_2,\cdots,y_n$的对偶排列$y_n,y_{n-1},\cdots,y_1$，有

$$\left|y_n+2y_{n-1}+\cdots+ny_1+y_1+2y_2+\cdots+ny_n\right|=(n+1)\left|y_1+y_2+\cdots+y_n\right|=(n+1).$$

所以$y_n+2y_{n-1}+\cdots+ny_1$与$y_1+2y_2+\cdots+ny_n$不可能同号，所以只能一正一负，所以对于任何排列$y_1+2y_2+\cdots+ny_n$正负参半.对于每一个任何排列，有限次交换二个相邻的数，可以得其余全部排列.且对于每一种交换，如$(y_k,y_{k+1})\to(y_{k+1},y_k)$，我们有

$$\left|\left(y_1+\cdots+ky_k+(k+1)y_{k+1}+\cdots+ny_n\right)-\left(y_1+\cdots+ky_{k+1}+(k+1)y_k+\cdots+ny_n\right)\right|$$

$$\left|y_{k+1}-y_k\right|\le\left|y_{k+1}\right|+\left|y_k\right|\le(n+1).$$

假设当第一排列在区间$\left(\dfrac{n+1}{2},+\infty\right)$，不断地交换相邻二个数时，会跳到$\left(-\infty,-\dfrac{n+1}{2}\right)$，则与上式矛盾.

原命题成立.

例 18 把 1993 块正方形玻璃排成一行，每一块都涂上红，白，黄三种颜色之一. 以下的操作称为一次操作；擦去两块不同色的玻璃上的颜色，并把它们都涂成第三种颜色. 求证：不论初始颜色的分布状况如何，总可以通过有限次操作，使所有玻璃片都涂上同一种颜色，并且最后的颜色是唯一确定的，与具体的调整方案无关.

题：把1993块正方形玻璃排成一行，每一块都涂上红、白、黄三种颜色之一。以下的操作称为一次调整：擦去两块不同色玻璃上的颜色，并把它们都涂上第三种颜色。求证：不论初始颜色的分布状况如何，总可以通过有限次适当的调整之后，使所有玻璃片都涂上同一种颜色，并且最后的颜色是唯一确定的，与具体的调整方案无关。

分析：把红、白、黄三种颜色分别记为 0，1，2，且此颜色的玻璃的个数分别记为 n_0，n_1，n_2，题目的操作：擦去 x，y颜色的玻璃，改涂z色，为 $-x-y+2z\equiv$改写为对称式 $-x-y-z+3z\equiv$从而想到考虑取模3，$-x-y-z\pmod 3\equiv-0-1-2\equiv 0\pmod 3$，所以每次操作颜色的和模3不变，假设最后是$x$颜色，则 $n_0\times 0+n_1\times 1+n_2\times 2\equiv 1993x\pmod 3$，因为 $(1993,3)=1$，所以此同余方程有唯一解x，即最后的颜色x唯一，这就证明了问题的后半部分。

今往证明问题的前半部分，不妨设$n_0\le n_1\le n_2$，注意到如果 n_0，n_1，n_2 有两个相等，比如 $n_0=n_1$，则可以将颜色0，1配对消掉，故只需考虑 $n_0<n_1<n_2$ 情况，打算通过调整逐步减少差距，如果可以，必定会有两个相等，从而证出。

考虑把颜色1，2各一个擦去，改涂颜色0，则三色个数变为 n_0+2，n_1-1，n_2-1，如果差距不减，则只能是 n_0+2 最大，n_1-1 最小的情况，所以 $(n_0+2)-(n_1-1)\ge n_2-n_0$，即 $(n_2-n_0)+(n_1-n_0)\le 3$，只能是 $n_1=n_0+1$，$n_2=n_1+1$，

此时，$1993=n_0+n_1+n_2=3n_0+3$ 是3的倍数，矛盾，所以差距必定可以减少，得证。

练习

1、已知 $0<\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n<\dfrac{\pi}{2}$，且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=A$，求证$\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\cdot\cdots\cdot\cos\alpha_n\le\left(\cos\dfrac{A}{n}\right)^n$.

2、给定自然数k实数$a>0$，已知$k_1+k_2+\cdots+k_r=k\ (k_i\in N^*,k\ge r\ge 1)$，求$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$的最大值.

解:当$a=1$时,$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}=r$,显然最大值为$k$.

当$a>0$,且$a\neq 1$时,$f(x)=a^x$在$[1,+\infty)$上为下凸函数,即$a^{k_i}+a^{k_j}\leqslant a+a^{k_i+k_j-1}(k_i,k_j\in\mathbb{N}^*$. 这是由于它等价于$a(a^{k_i-1}-1)(a^{k_j-1}-1)\geqslant 0$,两括号内显然同号.

所以我们可以经过$r-1$次调整将其调整为$k_1=k_2=\cdots=k_{r-1}=1,k_r=k+1-r$的情况,而值始终不减. 设此时的值为$F(r)=(r-1)a+a^{k+1-r}$.

又$a+a^m\leqslant a^{m+1}\Leftrightarrow m\geqslant\log_a(\frac{a}{a-1})$.

若$k+1-r\geqslant\log_a(\frac{a}{a-1})$,则

$$F(r)=(r-2)a+a+a_{k+1-r}\leqslant(r-2)a+a_{k+2-r}\leqslant(r-3)a+a_{k+3-r}\leqslant\cdots\leqslant a^k=F(1)$$

若$k+1-r<\log_a(\frac{a}{a-1})$,则

$$F(r)=ra-a+a_{k+1-r}\leqslant ra+a_{k-r}\leqslant\cdots\leqslant ka=F(k)$$

所以F的最大值为$\max\{a^k,ka\}=\max\{a^k,ka\}$.

所以$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$的最大值为

$$\max\{a^k,ka\}=\begin{cases}ka, & a\leqslant k^{\frac{1}{k-1}}(k\geqslant 2)\quad 当r=k,k_1=k_2=\cdots=k_r=1取等号\\ a^k, & k=1或a>k^{\frac{1}{k-1}}(k\geqslant 2)\quad 当r=1,k_1=k取等号\end{cases}$$

3、设实数$x_1,x_2,\cdots,x_{1\ 9}$满足如下两个条件：（1）$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le x_i\le\sqrt{3}(i=1,2,\cdots,1997)$；（2）$x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$. 试求$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{2}$的最大值，并说明理由.

4、 集 M 平面上的格点(x,y),$1\le x\le 12,1\le y\le 13$组成，将 M 的点染上红、蓝、黑三种颜色，证明其中必有四个同色的点，它们组成一个边与坐标轴平行的矩形.

证明 设红色点最多，则个数不小于$\dfrac{12\times 13}{3}=52$. 下证只要有 49 个点，命题就成立. 设各行的红点数分别为$a_1+a_2+\cdots+a_{13}=49$，考虑同一行上的二点组，这样的二点组共有$S=C_{a_1}^2+C_{a_2}^2+\cdots+C_{a_{13}}^2=\dfrac{1}{2}\left[\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{13}^2\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_{13}\right)\right]$. 用局部调整法可证当$a_1,a_2,\cdots,a_{13}$为$4,4,\cdots,4,3,3,3$排列时，S 最小，所以$S\ge 69$，将$x=i(i=1,2,\cdots,12)$每两列作为一组，共有 66 组，所以必有二组红点组在$x=i(i=1,2,\cdots,12)$同一列组里，所以有四个红色点构成边与坐标平行的矩形.

5、将 2006 表示成 5 个正整数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5之和．记 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$．问：

(1) 当 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5取何值时，S取到最大值；

(2) 进一步地，对任意 $1\leqslant i$，$j\leqslant 5$ 有$\left|x_i-x_j\right|\leqslant 2$，当 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5取何值时，S取到最小值. 说明理由.

解：(1) 首先这样的 S的值是有界集，故必存在最大值与最小值．若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且使$S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$取到最大值，则必有 $\left|x_i-x_j\right|\leqslant 1\quad(1\leqslant i，j\leqslant 5)$

事实上，假设(*)不成立，不妨假设 $x_1-x_2\geqslant 2$，则令 $x_1'=x_1-1$，$x_2'=x_2+1$，$x_i'=x_i$（$i=3，4，5$)．有$x_1'+x_2'=x_1+x_2$，$x_1'\cdot x_2'=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$．将 S 改写成

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$$

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')((x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$．于是有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$．这与 S 在

x_1，x_2，x_3，x_4，x_5时取到最大值矛盾．所以必有$|x_i-x_j|\leqslant 1$，($1\leqslant i$，$j\leqslant 5$)．

因此当 $x_1=402$，$x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 时 S 取到最大值．(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且$|x_i-x_j|\leqslant 2$ 时，只有（A）402， 402， 402， 400， 400；（B）402， 402， 401， 401， 400；（C）402， 401， 401， 401， 401； 三种情形满足要求．而后两种情形是由第一组作 $x_i'=x_i-1$，$x_j'=x_j+1$ 调整下得到的．根据上一小题的证明可知道，每次调整都使和式 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$变大．所以在 $x_1=x_2=x_3=402$，$x_4=x_5=400$ 时 S 取到最小值．

6、 已知 a_i 为正整数，$i=1,2,\cdots,n$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=t$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_{a_i}^2$ 取最小值的充要条件是对于 $1\le i<j\le n$，有$|a_i-a_j|\le 1$.

7、若 a,b,c 是正实数，$u=\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{a+2c}$ ，则 u 的最小值为

解：$\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{a+2c}\ge\dfrac{2a+2b}{a+b+4c}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b+2c}-\dfrac{a+b}{a+b+4c}\ge\dfrac{a+b}{a+b+4c}-\dfrac{b}{a+2c}$

$\Leftrightarrow\dfrac{a^2+2ac-b^2-2bc}{(b+2c)(a+b+4c)}\ge\dfrac{a^2+2ac-2bc-b^2}{(a+b+4c)(a+2c)}\Leftrightarrow(a-b)(a+b+2c)\left(\dfrac{1}{b+2c}-\dfrac{1}{a+2c}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{(a-b)^2(a+b+2c)}{(b+2c)(a+2c)}\ge 0$ 成立.所以只要求 $\dfrac{c}{a+b}+\dfrac{2a+2b}{a+b+4c}$ 的最小值.令 $d=a+b$，我们有

$u\ge\dfrac{c}{d}+\dfrac{2d}{d+4c}=\dfrac{d+4c}{4d}+\dfrac{2d}{d+4c}-\dfrac{1}{4}\ge 2\sqrt{\dfrac{d+4c}{4d}\cdot\dfrac{2d}{d+4c}}-\dfrac{1}{4}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}$.

8、已知非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant\dfrac{1}{2}$, 求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)$ 的最小值.

解: 当 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}+x_n$ 都为定值时, 由于 $(1-x_{n-1})(1-x_n)=1-(x_{n-1}+x_n)+x_{n-1}x_n$,

可见, $|x_{n-1}-x_n|$ 越大, 上式的值越小. 为此, 令 $x_i'=x_i(i=1,2,\cdots,n-2),x_{n-1}'=x_{n-1}+x_n,x_n'=0$, ①

则 $x_{n-1}'+x_n'=x_{n-1}+x_n,x_{n-1}'\cdot x_n'=0<x_{n-1}x_n$. $\therefore(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)\geqslant(1-x_1')(1-x_2')\cdots(1-x_{n-1}')$

其中 $x_1'+x_2'+\cdots+x_n'=x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\dfrac{1}{2}$. 再进行形如①的变换 $n-2$ 次, 即可得

$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)>1-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqslant\dfrac{1}{2}$, 其中等号当 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=x_3=\cdots=x_n=0$ 时取得.

$\therefore$所求最小值为$\dfrac{1}{2}$.