2010 我爱数学初中生夏令营数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2010)11-0023-03

说明：第一试每题 50 分，共 150 分；第二试每题 15 分，共 150 分.

第一试

1. 设 $n(n<100)$ 是正整数，且存在正整数 k，使得 $1\leqslant k\leqslant n-1$，满足

$$\frac{4k+1}{2n}+\frac{1-2k^2}{n^2}=\frac{1}{2}. \qquad ①$$

试问：满足条件的 n 有多少个取值？并证明你的结论.

2. 如图 1，设 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的外心分别为 E、F，直线 BE 与 CF 交于点 G. 若 $DG=\frac{1}{2}BC$，证明：

$$\angle ADG=2\angle ACG.$$

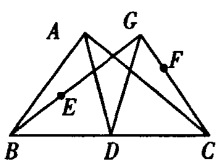

图 1

3. 求大于 2 的质数 p，使得抛物线

$$y=\left(x-\frac{1}{p}\right)\left(x-\frac{p}{2}\right)$$

上有点 (x_0,y_0) 满足 x_0 为正整数，y_0 为质数的平方.

第二试

1. 已知 $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2\,010$，且 $a\neq b$. 则 $c^2(a+b)=$______.

2. 若实数 x、y 满足 $|x|+|y|\leqslant1$，则 x^2-xy+y^2 的最大值为______.

3. 边长为整数、面积值等于周长值的直角三角形中的最大面积与最小面积的差为______.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边分别为 a、b、c，已知 $\angle C=2\angle B$，$ab=24$. 则 c 的取值范围是______.

5. 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle C=20°$，又点 M、N 分别在边 AC、BC 上，且满足 $\angle BAN=50°$，$\angle ABM=60°$. 则 $\angle NMB=$______.

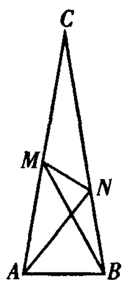

图 2

6. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，EF 为中位线，四边形 $AEFD$ 的面积与四边形 $EBCF$ 的面积比为 $\frac{\sqrt{3}+1}{3-\sqrt{3}}$，$\triangle ABD$ 的面积为 $\sqrt{3}$. 则梯形 $ABCD$ 的面积为______.

7. 已知方程 $x^2+(2-k)x+1=0$ 满足条件 $x>-1$，且 $kx>0$ 的实根仅有一个. 则 k 的取值范围为______.

8. 已知 $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(35-x)^2}=13$. 则 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{35-x}=$______.

9. 王强有四种颜色的小圆棒，表 1 列出不同颜色圆棒的长度.

表 1

颜色	绿	粉红	紫	红
长度	3 cm	4 cm	8 cm	9 cm

现要取若干根小圆棒接起来连成长度为 2 010 cm 的长棒，而且四种颜色的小圆棒每一种都至少用 81 根. 则不同的取法共有______种.

10. 在有 20 名歌手参加的比赛中，9 名裁判员分别给他们判定从 1～20 的名次. 已知每一名歌手得到的名次中，各名次之差不

超过3.若每名歌手所得到的名次的和排成递增序列:$C_1 \leqslant C_2 \leqslant \cdots \leqslant C_{20}$,则 C_1 的最大值为______.

参考答案

第一试

1. 由式①变形得 $(2k-n)^2=n+2$.

解得 $k=\frac{1}{2}(n\pm\sqrt{n+2})$.

因为 k 为整数,所以,

$n=m^2-2(m\in\mathbf{N})$.

于是,$k=\frac{1}{2}(m^2\pm m-2)$.

又 $1\leqslant k\leqslant n-1$,则

$1\leqslant\frac{m^2\pm m-2}{2}\leqslant m^2-3$.

解得 $m\geqslant3$.

但 $n<100$,故满足题意的 n 为

7,14,23,34,47,62,79,98.

共8个.

2. 如图3,联结 DE、DF.

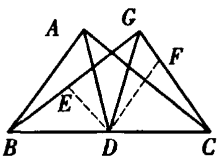

图3

易证 $\triangle BGC$ 为直角三角形.

又 E、F 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle ADC$ 的外心,则

$\angle GBC=90^\circ-\angle BAD$,

$\angle GCB=90^\circ-\angle DAC$.

故 $\angle GBC+\angle GCB$

$=180^\circ-\angle BAD-\angle DAC$

$=180^\circ-\angle BAC$.

于是,$\angle BAC=90^\circ=\angle BGC$.

因此,A、G、C、B 四点共圆,且 D 为圆心.

所以,$\angle ADG=2\angle ACG$.

3. 由题意知

$$y_0=\left(x_0-\frac{1}{p}\right)\left(x_0-\frac{p}{2}\right)=\frac{x_0p-1}{2}\cdot\frac{2x_0-p}{p}.$$

由 $\frac{x_0p-1}{2}>\frac{2x_0-p}{p}$,知 $\frac{2x_0-p}{p}=1$.

所以,$x_0=p$,$y_0=\frac{p^2-1}{2}$.

由题设 $y_0=q^2$(q 为质数),则

$p^2-1=2q^2\Rightarrow(p+1)(p-1)=2q^2$

$\Rightarrow4\mid(p+1)(p-1),4\mid2q^2\Rightarrow2\mid q$.

于是,$q=2$,$p=3$.

第二试

1. 2 010.

注意到

$a^2(b+c)-b^2(a+c)$

$=(a-b)(ac+bc+ab)=0$.

因 $a\neq b$,所以,$ac+bc+ab=0$.

则 $c^2(a+b)-b^2(a+c)$

$=(c-b)(ac+bc+ab)=0$.

故 $c^2(a+b)=b^2(a+c)=2\ 010$.

2. 1.

注意到

$$x^2-xy+y^2=\frac{1}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2.$$

又 $|x\pm y|\leqslant|x|+|y|\leqslant1$,则

$$x^2-xy+y^2\leqslant\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

当 x、y 一个取0,另一个取1时,上式等号成立.

3. 6.

设三角形三边长分别为 a、b、c.

依题意有

$a^2+b^2=c^2$,

$ab=2(a+b+c)$.

则 $ab-4(a+b)+8=0$.

解得 $(a,b)=(5,12)$ 或 $(6,8)$.

于是,$S_{\max}=30$,$S_{\min}=24$.

因此,$S_{\max}-S_{\min}=6$.

4. $(4\sqrt{2},+\infty)$.

如图4,作角平分线 CD.则

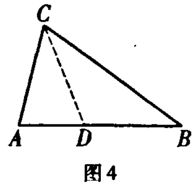

图4

$b^2<c^2=ab+b^2$

$<(a+b)^2$.

在 $\triangle BCD$ 中,

$\frac{2ac}{a+b}>a\Rightarrow c>\frac{a+b}{2}$.

所以,$c^2=ab+b^2>\frac{1}{4}(a+b)^2$,即

$3b^2+2ab-a^2>0\Rightarrow a<3b$.

则 $24=ab<3b^2\Rightarrow b^2>8$.

故 $c^2=24+b^2>32\Rightarrow c>4\sqrt{2}$.

当 $b\to2\sqrt{2}, a\to6\sqrt{2}, \alpha\to0$ 时,$c\to4\sqrt{2}$.

故 $c\in(4\sqrt{2},+\infty)$.

5. 30°.

易知 $AB=BN$.

如图 5,在边 AM 上取点 D,使得 $BD=BA$.

则 $BD=BN$,且 $\angle ABD=20°$.

从而,$\angle BDN=60°$, $\angle MDN=40°$.

所以,$\angle DMN=70°$, $\angle NMB=30°$.

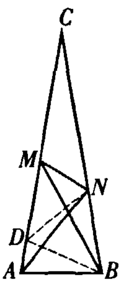

图 5

6. 2.

设 $AD=a, BC=b$,高为 $2h$,梯形 $ABCD$ 的面积为 S. 则

$EF=\frac{a+b}{2}, \frac{a}{b}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\sqrt{3}}{S-\sqrt{3}}$.

又 $\frac{\sqrt{3}+1}{3-\sqrt{3}}=\frac{S_{\text{四边形}AEFD}}{S_{\text{四边形}EBCF}}=\frac{S+2\sqrt{3}}{3S-2\sqrt{3}}$.

应用合分比得 $S=2$.

7. $k<0$ 或 $k=4$.

由题意得 $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(k-2\pm\sqrt{k^2-4k}\right)$.

又 $\Delta=k^2-4k\geqslant0$,则 $k\leqslant0$ 或 $k\geqslant4$.

分类讨论可得 $k<0$ 或 $k=4$.

8. 2,5.

令 $\sqrt[3]{x}=m, \sqrt[3]{35-x}=n, a=m+n, b=mn$.

则 $m^2+n^2=13$,即

$a^2-2b=13$; ①

$m^3+n^3=x+(35-x)=35$,即

$a^3-3ab=35$. ②

由式①、②消去 b 得

$a^3-39a+70=0$.

解得 $a=5,2,-7$(-7 舍去).

9. 91.

由题意得

$3(81+a)+4(81+b)+8(81+c)+9(81+d)$
$=2\,010$,

其中,a、b、c、d 为非负整数.

化简得 $3(a+3d)+4(b+2c)=66$.

故 $(a+3d, b+2c)$
$=(4i+2, 15-3i)\ (i=0,1,\cdots,5)$.

当 $a+3d=4i+2$ 时,(a,d) 有 $\left[\frac{4i+2}{3}\right]+1$ 种可能;

当 $b+2c=15-3i$ 时,(b,c) 有 $\left[\frac{15-3i}{2}\right]+1$ 种可能.

所以,共有不同的取法为

$1\times8+3\times7+4\times5+5\times4+7\times2+8\times1=91$.

10. 24.

若 9 名裁判都给某歌手判第一名,则 $C_1=9$.

若有两名歌手都得第一名,则其中 1 人得到不少于 5 个第一名,而其余 4 个名次不高于第四名,故 $C_1\leqslant5\times1+4\times4=21$.

若有三名歌手都得第一名,则他们所得的其余名次不高于第四名,他们的名次之和不大于 $1\times9+3\times9+4\times9=72$,故 $C_1\leqslant24$.

若有四名歌手都得第一名,则他们的名次之和不大于 $1\times9+2\times9+3\times9+4\times9=90$,所以,$C_1\leqslant24$.

而有五名或更多名歌手都得第一的情况是不可能的,所以,$C_1\leqslant24$.

下面给出一个 $C_1=24$ 的例子:

裁判员给名次和为 C_1、C_2、C_3 的三名歌手判的名次都是 1,1,1,3,3,3,4,4,4;

裁判员给名次和为 C_4、C_5、C_6 的三名歌手判的名次都是 2,2,2,5,5,5,6,6,6;

而裁判员给其余人的名次都在 7 到 20 之间.

此时,$C_1=24$.

(陈传理 提供)

2010我爱数学初中生夏令营数学竞赛

作者： 陈传理
作者单位：
刊名： 中等数学
英文刊名： HIGH-SCHOOL MATHEMATICS
年，卷(期)： 2010(11)