2009我爱数学初中生夏令营数学竞赛

说明:第一试每小题 50分,共 150分;第二试每小题 15分,共 150分.

第 一 试

1. 当代数式

$$a^2+b^2+c^2+d^2+(1-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-1)^2$$

的值达到最小时,$a+b+c+d$的值等于多少?证明你的结论.

2. 已知△ABC内接于半径为 1的⊙O,并且 $AB\cdot AC=AB-AC=1$. 试求△ABC的三个内角的度数,并证明你的结论.

3. 是否存在满足下列条件的正整数:它的立方加上 101所得的和恰是一个完全平方数?证明你的结论.

第 二 试

1. 能使 $\left|\sqrt{\frac{n}{n+2\,009}}-1\right|>\frac{1}{1\,005}$成立的正整数 n的值的个数等于______.

2. 化简 $\sqrt[3]{10+7\sqrt{2}}+\sqrt[3]{10-7\sqrt{2}}$所得的结果是______.

3. 点 A、B分别在张角为 60°的一个角的两条边上,并且它们相距 120 m. 若点 A向该角的顶点移动 72 m,则点 A、B的距离缩小 24 m. 那么,点 A、B原来到这个角的顶点的距离分别为______、______.

4. 已知

$$\frac{1}{1\times\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

的值大于 $\frac{19}{20}$,小于 $\frac{20}{21}$. 则正整数 n的最大值与最小值的差等于______.

5. 已知关于 x的方程

$$x^4-6x^3+ax^2+6x+b=0$$

的左边能被 $x-1$整除,而被 $x+2$除所得的余式为 72. 则这个方程的所有解(按从小到大的顺序)是______.

6. 如果两个正整数的差为 21,最大公约数与最小公倍数的和为 1 463,那么,这两个正整数是______.

7. 设 AB、CD是⊙O的两条互相垂直的直径,E为线段 OB上的一点,且 $OE=\frac{1}{n}BE$,线段 CE的延长线交⊙O于点 F,线段 AF与 DO交于点 G. 则$\frac{DG}{GC}=$______.

$\angle NKP=\angle NAP=\angle DAU_A=\angle BAC$.

又 $PK\perp AB$,则 $NK\perp AC$. 故 $NK\parallel BD$.

同理,$LM\parallel BD$.

注意到 △AKN与 △ABD的位似中心为 A,O_A与 U_A是对应点,△CML与 △CDB的位似中心为 C,O_C与 U_C是对应点.

因为 $U_AU_C\parallel O_AO_C\parallel AC$,所以,两个位似变换的位似比相同. 记为

$$\lambda=\frac{AN}{AD}=\frac{AK}{AB}=\frac{AO_A}{AU_A}=\frac{CO_C}{CU_C}=\frac{CM}{CD}=\frac{CL}{CB}.$$

于是,$\frac{DN}{DA}=\frac{DM}{DC}=\frac{BK}{BA}=\frac{BL}{BC}=1-\lambda$.

因此,$KL\parallel AC\parallel MN$,即四边形 $KLMN$是矩形.

7. 本届 IMO第 6题.

8.已知 E 是圆内接四边形 $ABCD$ 的边 CD 的延长线上一点，I 是 $\triangle ABC$ 的内心. 若 $\angle ABC=70^\circ$，$\angle ACB=60^\circ$，$DE=DA$，则 $\angle DEI$ 的度数是______.

9.甲厂买来一台机器，每天生产某种产品. 乙厂在若干天后，也买来一台同样的机器，开始以同样的速度生产同一种产品.

当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 6 倍时，甲乙两厂恰好都生产了整数天，此时，各买一台同样的机器立刻投入生产；当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 4 倍时，甲乙两厂恰好都生产了整数天，此时，又各买两台同样的机器投入生产；当甲厂生产的该种产品总数为乙厂的 2 倍时，甲乙两厂恰好都生产了整数天，此时，甲厂生产该种产品的时间才四个多月.

如果甲厂第一天生产该种产品的日期是 2009 年 1 月 1 日，并且每台机器天天都投入生产，每台机器的生产效率不变，那么，甲厂生产的该种产品总数是乙厂的 2 倍时，当天的日期是 2009 年______月______日.

10.设 n 是正整数. 如果在包含 2 009 在内的 $2n+1$ 个连续的自然数中，前 $n+1$ 个数的平方和等于后 n 个数的平方和，则 n 的值等于______.

参考答案

第一试

1.按 a 降幂排列，

原式 $=3a^2-(2+2b)a+\cdots$.

因此，当原式的值达到最小时，

$$a=\frac{2+2b}{2\times3}=\frac{1+b}{3}.$$

同理，当原式的值达到最小时，分别有

$$d=\frac{1+c}{3},\ b=\frac{a+c}{3},\ c=\frac{d+b}{3}.$$

联立解得 $b=c=\frac{1}{5}$，$a=d=\frac{2}{5}$.

因此，当原式的值达到最小时，$a+b+c+d$ 的值等于 $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

2.由 $AB+AC=\sqrt{(AB-AC)^2+4AB\cdot AC}=\sqrt{5}$，

解得 $AB=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

在 OA 上取一点 D，使 $OD=AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则

$$AD=1-OD=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle CAD$ 中，有

$$\angle OAC=\angle CAD,\ \frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{AC}{OA}.$$

因此，$\triangle OAC\backsim\triangle CAD$.

于是，$CD=AC=OD$，

$\angle ACD=\angle AOC=\angle OCD$，

$\angle OAC=\angle OCA=2\angle AOC$.

故 $5\angle AOC=180^\circ\Rightarrow\angle AOC=36^\circ$

$\Rightarrow\angle ABC=18^\circ$.

在 AB 上取一点 E，使 $AE=1$，则

$$EB=AB-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

在 $\triangle EBO$ 和 $\triangle OBA$ 中，有

$$\angle EBO=\angle OBA,\ \frac{OB}{BE}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{AB}{OB}.$$

故 $\triangle EBO\backsim\triangle OBA$.

于是，$BE=OE$，$OE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

因此，$\angle OAE=36^\circ$，$\angle OBA=36^\circ$，

$\angle AOB=180^\circ-36^\circ-36^\circ=108^\circ$.

故 $\angle ACB=54^\circ$ 或 126°，$\angle BAC=108^\circ$ 或 36°.

所以，在 $\triangle ABC$ 中，

$\angle ABC=18^\circ$，$\angle ACB=54^\circ$，$\angle BAC=108^\circ$

或 $\angle ABC=18^\circ$，$\angle ACB=126^\circ$，$\angle BAC=36^\circ$.

3.若存在满足题设条件的正整数 x，则

$x^3+101=y^2\ (y\in\mathbf{N}_+)$.

若 x 为偶数，则 y 为奇数.

令 $x=2n$，$y=2m+1\ (n、m\in\mathbf{N})$. 则

$2n^3+25=m^2+m$，

该式左边为奇数，右边为偶数，矛盾.

因此,x为奇数,y为偶数,可令 $x=2n+1$, $y=2m$ (n、$m\in$ **N**). 则

$(2n+1)^3+101=(2m)^2$

$\Rightarrow 8n^3+12n^2+6n+102=4m^2$

$\Rightarrow 4n^3+6n^2+3n+51=2m^2$.

而 $3n+51$是偶数,n是奇数,令 $n=2n_1-1$.

则 $x=4n_1-1$ ($n_1\in$ **N**$_+$). ①

若 x用 3除所得的余数为 0,则 y^2用 3除所得的余数为 2,矛盾.

若 x用 3除所得的余数为 1,则 y^2用 3除所得的余数为 0, y用 3除所得的余数为 0.

令 $x=3n+1$, $y=3m$ (n、$m\in$ **N**). 则

$3^3n^3+3^3n^2+3^2n+102=9m^2$.

各项除 102外都是 9的倍数,矛盾.

因此,x用 3除后所得的余数为 2. 可令

$x=3n-1$ ($n\in$ **N**$_+$). ②

由式 ①、②可知

$x=12n-1$ ($n\in$ **N**$_+$). ③

由于 y^2的个位数字只可能是 0、1、4、9、6、5,不可能是 2、3、7、8,因此,相应的 x^3的个位数字不可能是 1、2、6、7,即

相应的 x的个位数字不可能是 1、3、6、8. ④

由式 ③, x的最小可能值依次为

11, 23, 35, 47, 59, 71, 83, 95, ….

由结论 ④, x的最小可能值不可能是

11, 23, 71, 83.

因此,x的最小可能值依次为

35, 47, 59, 95, ….

经检验,当 $x=35, 47, 59$时,都不符合题目要求.

若 $x=95$,则

$95^3+101=857\ 375+101=857\ 476=926^2$,

它是完全平方数.

因此,存在满足题设条件的正整数 95.

第 二 试

1. 1 008 015.

由 $1-\sqrt{\dfrac{n}{n+2\ 009}}>\dfrac{1}{1\ 005}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{n}{n+2\ 009}}<\dfrac{1\ 004}{1\ 005}$

$\Rightarrow\dfrac{n}{n+2\ 009}<\dfrac{1\ 004^2}{1\ 005^2}$

$\Rightarrow n<1\ 004^2=1\ 008\ 016$.

因此,能使 $\left|\sqrt{\dfrac{n}{n+2\ 009}}-1\right|>\dfrac{1}{1\ 005}$成立的正整数 n的值的个数等于 1 008 015.

2. $2\sqrt[3]{4}$.

令原式 $=x>0$. 则

$x^3=20+3\sqrt[3]{100-49\times2}\cdot x$

$\Rightarrow x^3-3\sqrt[3]{2}\cdot x-20=0$.

令 $x=\sqrt[3]{4}y>0$. 则

$4y^3-6y-20=0$

$\Rightarrow(y-2)(2y^2+4y+5)=0$.

解得 $y=2$.

故原式 $=2\sqrt[3]{4}$.

3. $72+32\sqrt{3}$ m, $64\sqrt{3}$ m.

设该角的顶点为 C,点 A向该角的顶点移动 72 m后到达的位置为点 D. 则

$\angle BCA=60^\circ$, $AB=120$, $AD=72$,

$BD=120-24=96$.

由于 $72:96:120=3:4:5$,则$\angle ADB=90^\circ$.

在 Rt$\triangle BCD$中,设 $CD=x$. 则 $BC=2x$.

故 $(2x)^2-x^2=96^2$.

解得 $x=32\sqrt{3}$, $2x=64\sqrt{3}$.

故 $AC=72+32\sqrt{3}$ m, $BC=64\sqrt{3}$ m.

4. 39.

注意到

$$\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}$$

$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k^2+k}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

则原式 $=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

由已知$\dfrac{19}{20}<1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{20}{21}$,有

$20<\sqrt{n+1}<21\Rightarrow 20^2-1<n<21^2-1$.

故正整数 n的最大值 21^2-2与最小值

20^2的差等于 $21^2-20^2-2=41-2=39$.

5. $-1,1,2,4$.

由已知可得

$$\begin{cases}1-6+a+6+b=0,\\(-2)^4-6(-2)^3+a(-2)^2+6(-2)+b=72\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=7,\\b=-8.\end{cases}$$

故原方程为

$x^4-6x^3+7x^2+6x-8=0$,

即 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)=0$.

这个方程的所有解(按从小到大的顺序)是 $-1,1,2,4$.

6. 112、91.

设这两个正整数为 x、$y(x>y)$,它们的最大公约数为 d,且 $x=dx_1$, $y=dy_1$. 则它们的最小公倍数是 dx_1y_1,且

$$\begin{cases}d(x_1-y_1)=21,\\d(1+x_1y_1)=1\,463.\end{cases}$$

由于 $(1\,463,21)=7$,因此,$d=1$或 7.

若 $d=1$,则$\begin{cases}x_1-y_1=21,\\x_1y_1=1\,462.\end{cases}$

故 $x_1+y_1=\sqrt{6\,289}$,矛盾.

若 $d=7$,则$\begin{cases}x_1-y_1=3,\\x_1y_1=208.\end{cases}$

故 $x_1+y_1=\sqrt{841}=29$.

于是,$\begin{cases}x_1=16,\\y_1=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=112,\\y=91.\end{cases}$

所以,这两个正整数是 112、91.

7. $\dfrac{1}{n+1}$.

设圆的半径为 $n+1$. 由已知得

$OE=1$, $CE=\sqrt{1^2+(n+1)^2}$.

联结 DF. 则$\angle CFD=90°$.

故 $\triangle EOC\backsim\triangle DFC\Rightarrow\dfrac{EC}{DC}=\dfrac{OC}{CF}$.

则 $CF=\dfrac{2(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$,

$EF=CF-CE=\dfrac{(n+1)^2-1}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$.

作 $FH\perp BO$,垂足为 H. 则

$\triangle COE\backsim\triangle FHE$

$$\Rightarrow\frac{FH}{OC}=\frac{EH}{OE}=\frac{EF}{CE}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}.$$

故 $FH=\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}(n+1)$,

$EH=\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}$.

又 $\triangle AGO\backsim\triangle AFH$,则

$$\frac{OG}{AO}=\frac{FH}{AH}=\frac{\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}(n+1)}{(n+1)+1+\dfrac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2+1}}$$

$$=\frac{n}{n+2},$$

$OG=\dfrac{n(n+1)}{n+2}$.

故$$\frac{DG}{GC}=\frac{n+1-\dfrac{n(n+1)}{n+2}}{n+1+\dfrac{n(n+1)}{n+2}}=\frac{1}{n+1}.$$

8. $25°$.

由已知可得

$\angle BAC=50°$, $\angle EDA=\angle ABC=70°$,

$\angle DEA=\angle DAE=55°$,

$\angle CIA=90°+\dfrac{1}{2}\angle ABC=180°-\angle CEA$.

因此,C、I、A、E四点共圆.

所以,$\angle DEI=\angle CAI=\dfrac{1}{2}\times50°=25°$.

9. 5月 9日.

设当甲厂生产的产品总数是乙厂的 6倍时,甲厂生产了 x天,乙厂生产了$\dfrac{x}{6}$天. 再过 y天,甲厂生产的产品总数是乙厂的 4倍. 则

$$x+2y=4\left(\frac{x}{6}+2y\right),$$

即 $x=18y$. ①

设又过 z天,甲厂生产的产品总数是乙厂的 2倍. 则

$$x+2y+4z=2\left(\frac{x}{6}+2y+4z\right),$$

第六届中国东南地区数学奥林匹克

第一天

1.试求满足方程 $x^2-2xy+126y^2=2009$ **的所有整数对** (x,y). **(张鹏程　供题)**

2.在凸五边形 $ABCDE$ **中,已知** $AB=DE$, $BC=EA$, $AB\neq EA$,**且** B、C、D、E**四点共圆.证明:**A、B、C、D**四点共圆的充分必要条件是** $AC=AD$. **(熊　斌　供题)**

3.设 x、y、$z\in\mathbf{R}_+$, $\sqrt{a}=x(y-z)^2$, $\sqrt{b}=y(z-x)^2$, $\sqrt{c}=z(x-y)^2$.**求证:**

$$a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+bc+ca).$$

(唐立华　供题)

4.在一个圆周上给定十二个红点.求 n **的最小值,使得存在以红点为顶点的** n**个三角形,满足以红点为端点的每条弦,都是其中某个三角形的一条边.** **(陶平生　供题)**

第二天

5.设 $1,2,\cdots,9$**的所有排列** $X=(x_1,x_2,\cdots,x_9)$**的集合为** A.**对任意的** $X\in A$,**记**

$$f(X)=x_1+2x_2+\cdots+9x_9,$$

$$M=\{f(X)\mid X\in A\}.$$

求 $|M|$ **(**$|M|$**表示集合** M **的元素个数).** **(熊　斌　供题)**

6.如图 1,已知 $\odot O$、$\odot I$ **分别是** $\triangle ABC$ **的外接圆、内切圆.证明:过** $\odot O$ **上的任意一点** D,**都可以作一个** $\triangle DEF$,**使得** $\odot O$、$\odot I$**分别是** $\triangle DEF$**的外接圆、内切圆.** **(陶平生　供题)**

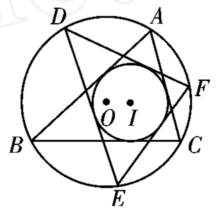

图 1

即 $\frac{2}{3}x=2y+4z$

由式①得

$$5y=2z \qquad ②$$

故 y是 2的倍数.

令 $y=2n\ (n\in\mathbf{N}_+)$.则

$$x+y+z=18y+y+\frac{5}{2}y=43n.$$

由已知得

$$120=31+28+31+30$$

$$\leq 43n\leq 31+28+31+30+31=151.$$

因此, $x+y+z=43n=129$.

所以, $129-31-28-31-30=9$.

于是,当甲厂生产的产品总数是乙厂的2倍时,当天的日期是 2009年 5月 9日.

10. 31.

设 $m,m+1,\cdots,m+2n$是满足上述条件的 $2n+1$个连续的自然数.则

$$m^2+(m+1)^2+\cdots+(m+n)^2$$

$$=(m+n+1)^2+(m+n+2)^2+\cdots+(m+2n)^2.$$

令 $S_k=1^2+2^2+\cdots+k^2$.则

$$S_{m+n}-S_{m-1}=S_{m+2n}-S_{m+n}.$$

代入化简得 $2mn^2+2n^3-m^2+n^2=0$,即

$$m=2n^2+n.$$

又 $m\leq 2009\leq m+2n$,则

$$2n^2+n\leq 2009\leq 2n^2+3n.$$

因此, $n=31$.

(夏兴国　提供)