2007 我爱数学初中生夏令营数学竞赛

说明:第一试每题 50 分,共 150 分;第二试每题 15 分,共 150 分.

第 一 试

1. 已知 $a \neq 0$,并且关于 x 的方程

$$ax^2 - bx - a + 3 = 0 \quad ①$$

至多有一个解. 试问:关于 x 的方程

$$(b-3)x^2 + (a-2b)x + 3a + 3 = 0 \quad ②$$

是否一定有解?并证明你的结论.

2. 已知点 D 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的中点,P 为 AB 线段内部的任意一点,设 BP 的垂直平分线与直线 AD 交于点 E,PC 与 AD 交于点 F. 求证:直线 EP 是 $\triangle APF$ 的外接圆的切线.

3. 在 1,2,…,2 007 这 2 007 个正整数中,最多可以取出多少个数,使得所取出的数中的每一个都与 2 007 互质,并且所取出的数中的任意三个的和都不是 7 的倍数.

第 二 试

1. 已知在 Rt $\triangle ABC$ 中,$\angle C = 90°$,$\frac{AC}{BC} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$. 则 $\frac{AB}{AC}$ = ______.

2. 已知 $\begin{cases} a + b = 1, \\ \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{2\,007 - c} = \frac{1}{2\,007}. \end{cases}$ 则代数式 $\frac{a^{2\,008}}{c^{2\,007}} + \frac{b^{2\,008}}{(2\,007 - c)^{2\,007}}$ 化简的最后结果是______.

3. 代数式 $113\sqrt{x^2 + 3} - 110x$ 的最小值为______.

4. 如果一个直角三角形的两条直角边的乘积等于它的斜边的平方的 $\frac{1}{4}$,那么,这个直角三角形中较大的锐角的度数为______.

5. 已知在直角坐标系 xOy 中,$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(2\sqrt{2}, \sqrt{2} + \sqrt{6})$、$B(\sqrt{2}, \sqrt{2})$、$C(5\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 则 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高与 $\angle ABC$ 的平分线的交点的坐标为______.

6. 已知某工厂一月份生产某产品 1 万件,二月份生产 1.2 万件,三月份生产 1.3 万件,n 月份生产 $ab^n + c$ 万件,其中,a、b、c 都是常数,$n = 1, 2, \cdots, 12$. 则该工厂四月份生产______万件.

7. 方程

$$3x^3 + 2\sqrt{2}x^2 - (17 - 9\sqrt{2})x - (6 - 5\sqrt{2}) = 0$$

的解为 x_1 = ______,x_2 = ______,x_3 = ______.

8. 已知矩形 $ABCD$ 的周长的平方与面积的比为 k. 则矩形 $ABCD$ 的较长的一边与较短的一边的长度的比等于______.

9. 已知正方形纸片 $ABCD$ 的面积为 2 007 cm^2. 现将该纸片沿一条线段折叠(如图 1),使点 D 落在边 BC 上的点 D' 处,点 A 落在点 A' 处,$A'D'$ 与 AB 交于点 E. 则 $\triangle BD'E$ 的周长等于______cm.

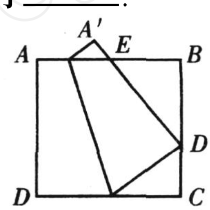

图 1

10. 若 x 为整数,$3 < x < 200$,且 $x^2 + (x+1)^2$ 是一个完全平方数,则整数 x 的值等于______.

参 考 答 案

第 一 试

1. 由题意知,方程①的判别式

$$\Delta_1 = b^2 + 4a(a-3) \leq 0$$

$$\Rightarrow b^2 + (2a-3)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 \leq b \leq 3, \\ -3 \leq 2a - 3 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 3 \leq 0, \\ 0 \leq a \leq 3. \end{cases}$$

当 $b - 3 = 0$ 时,方程②化为 $-\frac{9}{2}x + \frac{15}{2} = 0$,有解.

当 $b - 3 < 0$ 时,方程②的判别式

$$\Delta_2 = (a - 2b)^2 - 12(a+1)(b-3) > 0,$$

此时也有解.

综上所述，方程②一定有解.

2. 以 E 为圆心、EB 为半径作圆，则点 P、C 都在该圆的圆周上. 联结 EC. 则

$$\angle PAE = 90° - \angle ABC$$
$$= 90° - \frac{1}{2}\angle PEC = \angle EPC.$$

因此，EP 是 $\triangle APF$ 的外接圆的切线.

3. 将 1，2，…，2 007 分别用 7 除，余数为 1、2、3、4、5 的各有 286 + 1 = 287 个；余数为 6、0 的各有 286 个.

在 1，2，…，2 007 中，与 2 007 不互质的数有 3，2 ×3，3 ×3，…，669 ×3 以及 223，2 ×223，4 ×223，5 ×223，7 ×223，8 ×223.

将这些与 2 007 不互质的数分别用 7 除，余数依次为 3，6，2，5，1，4，0，3，6，2，5，1，4，0，…，3，6，2，5 以及 6，5，3，2，0，6.

于是，在这些与 2 007 不互质的数中，余数为 1、2、3、4、5、6、0 的依次有 95、97、97、95、97、98、96 个.

在 1，2，…，2 007 且与 2 007 互质的数中，余数为 1、2、3、4、5、6、0 的依次有 192、190、190、192、190、188、190 个.

要使所取出的数中的任意三个的和都不是 7 的倍数，至多取 2 个余数为 0 的数. 由于余数为 (1，3，3)、(3，2，2)、(2，6，6)、(6，4，4)、(4，5，5)、(5，1，1) 以及 (1，2，4)、(3，6，5) 的三数的和都是 7 的倍数，因此，至多取 2 组其余数在图 2 中不相邻的全部数.

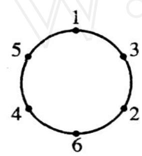

图 2

经验证可知，取 2 组余数为 1、4 的全部数，再取 2 个余数为 0 的数，符合题目的要求，且取出的数的个数达到最大值. 故最多可以取出 192 + 192 + 2 = 386 个数，使得所取出的数中的每一个都与 2 007 互质，并且所取出的数中的任意三个的和都不是 7 的倍数.

第 二 试

1. $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

由 $\tan B = \frac{AC}{BC} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$，则

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin B} = \sqrt{1 + \cot^2 B} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

2. $\frac{1}{2\,007^{2\,007}}$.

由 $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{2\,007 - c} = \frac{1}{2\,007} = \frac{(a+b)^2}{c + (2\,007 - c)}$

$$\Rightarrow a^2\frac{2\,007 - c}{c} + b^2\frac{c}{2\,007 - c} = 2ab$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{2\,007 - c}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{2\,007 - c}.$$

又 $a + b = 1$，故 $a = \frac{c}{2\,007}$，$b = \frac{2\,007 - c}{2\,007}$.

则 $\frac{a^{2\,008}}{c^{2\,007}} + \frac{b^{2\,008}}{(2\,007 - c)^{2\,007}} = \frac{1}{2\,007^{2\,007}}$.

3. $3\sqrt{223}$.

令 $y = 113\sqrt{x^2 + 3} - 110x$，则

$$y^2 + 220xy = 3 \times 223x^2 + 3 \times 113^2,$$

即 $3 \times 223x^2 - 220yx + 3 \times 113^2 - y^2 = 0$.

故 $\Delta = (220y)^2 - 4 \times 3 \times 223(3 \times 113^2 - y^2)$

$$= 4 \times 113^2(y^2 - 3^2 \times 223) \geq 0.$$

所以，$y \geq 3\sqrt{223}$.

当且仅当 $x = \frac{110}{\sqrt{223}}$ 时，y 取最小值 $3\sqrt{223}$.

4. 75°.

设较大的锐角为 α. 由题意易知

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 75°.$$

5. $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

设 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高与 $\angle ABC$ 的平分线交于点 $P(2\sqrt{2}, \sqrt{2} + h)$. 则

$$\tan\angle ABC = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}, \tan\angle PBC = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

又 $\angle ABC = 2\angle PBC$，于是，

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{2\frac{h}{\sqrt{2}}}{1 - \left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

6. 1.35.

由题设易知

$ab + c = 1$，$ab^2 + c = 1.2$，$ab^3 + c = 1.3$.

则 $ab(b - 1) = 0.2$，$ab^2(b - 1) = 0.1$.

故 $b = 0.5$，$a = -0.8$，$c = 1.4$.

所以，$ab^4 + c = 1.35$.

2007 年北京市中学生数学竞赛(初二)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 若 a、b、c 是 3 个不同的正整数,并且 $abc=16$,则 $a^b-b^c+c^a$ 可能的最大值是(　　).

(A) 249　(B) 253　(C) 263　(D) 264

2. 已知三个连续的正整数的倒数和等于 $\frac{191}{504}$. 则这三个数之和等于(　　).

(A) 27　(B) 24　(C) 21　(D) 18

3. 分母是 2 007 的正的最简真分数有(　　)个.

(A) 675　(B) 1 326　(C) 1 329　(D) 1 332

4. 对于实数 x,符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数,例如,$[3.14]=3$,$[-7.59]=-8$. 则关于 x 的方程 $\left[\frac{3x+7}{7}\right]=4$ 的整数根有(　　)个.

(A) 4　(B) 3　(C) 2　(D) 1

5. 如图 1,已知长方形的长为 8,宽为 4,将长方形沿一条对角线折起压平. 则重叠部分(阴影三角形)的面积是(　　).

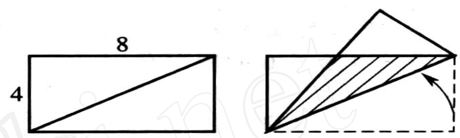

图 1

---

7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\sqrt{2}-1$, $1-2\sqrt{2}$.

令 $x=\sqrt{2}y$,代入原方程得

$$6\sqrt{2}y^3+4\sqrt{2}y^2-17\sqrt{2}y+18y-6+5\sqrt{2}=0.$$

易知 $y=\frac{1}{3}$ 满足条件. 故 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 于是,

$$3x^3+2\sqrt{2}x^2-(17-9\sqrt{2})x-(6-5\sqrt{2})$$
$$=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(3x^2+3\sqrt{2}x+9\sqrt{2}-15).$$
$$=3\left(x-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)(x-\sqrt{2}+1)(x+2\sqrt{2}-1).$$

所以,$x_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_2=\sqrt{2}-1$, $x_3=1-2\sqrt{2}$.

8. $\frac{k-8}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{k(k-16)}$.

设矩形的长、宽分别为 a、$b(a\geq b)$.

则 $\frac{4(a+b)^2}{ab}=k$,即

$$4a^2+(8-k)ab+4b^2=0.$$

令 $t=\frac{a}{b}$,则 $4t^2+(8-k)t+4=0$.

解得 $t=\frac{1}{8}\left[(k-8)+\sqrt{k(k-16)}\right]$.

9. $6\sqrt{223}$.

设正方形边长 $a=\sqrt{2\,007}$, $\angle D'BC=\alpha$.

则 $\angle BD'E=2\alpha$, $CD'=a\tan\alpha$,

$BD'=a(1-\tan\alpha)$.

所以,$\triangle BD'E$ 的周长为

$$a(1-\tan\alpha)(1+\tan 2\alpha+\sec 2\alpha)$$
$$=a\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}$$
$$=a\cdot\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=2a=6\sqrt{223}.$$

10. 20 或 119.

设 $x^2+(x+1)^2=v^2$,则 $(2x+1)^2=2v^2-1$.

令 $u=2x+1$,则 $u^2-2v^2=-1$. 其为佩尔方程,其基本解为 $(u_0,v_0)=(1,1)$.

其全部正整数解可由

$$u_n+v_n\sqrt{2}=(u_0+v_0\sqrt{2})^{2n+1}$$

得到. 其中,$(u_1,v_1)=(7,5)$, $(u_2,v_2)=(41,29)$, $(u_3,v_3)=(239,169)$, $u_4>400$.

故 $x=20$ 或 119.

(夏兴国　提供)