2009年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2010)05-0028-03

一、填空题(每小题8分,共40分)

1.已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是单位向量,并且向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 互相垂直.则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$______.

2. $\frac{1}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}$ 的值是______.

3. 如图1,过⊙O 外一点 M 引圆的切线切⊙O 于点 B,联结 MO 交⊙O 于点 A,已知 $MA=4$, $MB=4\sqrt{3}$, N 为弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.则曲边三角形(阴影部分)的面积等于______.

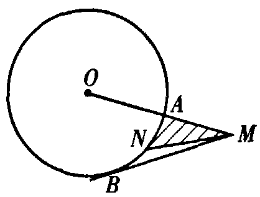

图1

4. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ 的值是______.

5.在平面直角坐标系中,不论 m 取何值时,抛物线 $y=mx^2+(2m+1)x-(3m+2)$ 都不通过的直线 $y=-x+1$ 上的点的坐标是______(写出全部符合条件点的坐标).

二、(15分)Rt△ABC 内切圆的半径为 r,直角的角平分线的长为 t.求证:Rt△ABC 的两条直角边的长 a、b 是关于 x 的一元二次方程

$$(t-2\sqrt{2}r)x^2+2\sqrt{2}r^2x-2tr^2=0$$

的根.

三、(15分)求函数 $f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$,使得

(1) $f(1)=1$;

(2)对于所有的 x、$y\in\mathbf{N}_+$,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

都成立.

四、(15分)如图2,在▱$ABCD$ 中,∠BAD 的平分线与 BC 交于点 M、与 DC 的延长线交于点 N,△CMN 的外接圆⊙O 与△CBD 的外接圆的另一交点为 K.证明:

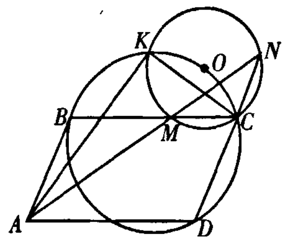

图2

(1)点 O 在△CBD 的外接圆上;

(2)∠$AKC=90^\circ$.

五、(15分)证明:在任意给出的七个实数中,一定能找到两个实数 x、y,使得

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

参考答案

一、1. $\frac{\pi}{3}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\theta$.则根据向量垂直的条件得

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\\&=5\boldsymbol{a}^2+10\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{b}^2\\&=5+6\cos\theta-8=6\cos\theta-3.\end{aligned}$$

由此 $\cos\theta=\frac{1}{2}$.所以,$\theta=\frac{\pi}{3}$.

2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$$\frac{1}{\cos 290^\circ}+\frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^\circ}=\frac{1}{\cos 70^\circ}-\frac{1}{\sqrt{3}\sin 70^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin 70^\circ-\cos 70^\circ}{\sqrt{3}\sin 70^\circ\cdot\cos 70^\circ}$$

$$=\frac{\sin 70^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 70^\circ\cdot\sin 30^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 140^\circ}$$

$$=\frac{4\sin(70^\circ-30^\circ)}{\sqrt{3}\sin 40^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

3. $8-\frac{4\pi}{3}$.

根据条件,延长 MO 交$\odot O$ 于点 C. 设$\odot O$ 的半径为 r. 则 $MC=4+2r$.

由切割线定理得

$MB^2=MA\cdot MC$,

即　$48=4(4+2r)$.

解得 $r=4$.

所以,$OC=OA=AM=4$.

联结 OB. 在 Rt$\triangle OBM$ 中,

$$\sin\angle MOB=\frac{MB}{OM}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow\angle MOB=60^\circ$.

因此,弧$\overset{\frown}{AB}$的度数为 60°,而 N 为弧$\overset{\frown}{AB}$的中点,则弧$\overset{\frown}{AN}$的度数为 30°.

联结 ON. 则$\angle MON=30^\circ$. 从而,

$$S_{\triangle MON}=\frac{1}{2}OM\cdot ON\sin 30^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times 8\times 4\times\frac{1}{2}=8.$$

而扇形 AON 的面积为

$$\pi\times 4^2\times\frac{30}{360}=\frac{4\pi}{3}.$$

故阴影图形的面积为 $8-\frac{4\pi}{3}$.

4. 4.

设$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$.

两边立方并整理得

$x^3-6x-40=0$.

观察知,4 是方程的一个根. 所以,

$(x-4)(x^2+4x+10)=0$.

由 $\Delta=4^2-4\times 10=-24<0$,知方程 $x^2+4x+10=0$ 无实根.

故方程 $x^3-6x-40=0$ 只有唯一的实根 $x=4$.

5. $(1,0),(-3,4),\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

由 $y=mx^2+(2m+1)x-(3m+2)$

$=m(x+3)(x-1)+(x-2)$

可知,抛物线一定过点 $A(1,-1)$、$B(-3,-5)$.

过点 A、B 分别作 y 轴的平行线交直线 $y=-x+1$于点 $C(1,0)$、$D(-3,4)$.

过点 A、B 的直线与 $y=-x+1$ 交于点 $E\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

则 C、D、E 三点满足条件.

二、如图 3,设 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$, $AB=c$, $AC=b$, $CB=a$,内切圆的圆心为 O. 联结 OA、OB. 则

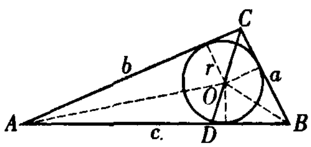

图 3

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab.\qquad①$$

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle BDC}$

$$=\frac{1}{2}bt\sin 45^\circ+\frac{1}{2}at\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}t(a+b).$$

$$故\ ab=\frac{1}{\sqrt{2}}t(a+b).\qquad②$$

而 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}+S_{\triangle OAB}$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+a+b-2r)$$

$$=r(a+b-r)=(a+b)r-r^2.$$

与式①比较得

$$ab=2(a+b)r-2r^2.\qquad③$$

联立式②、③得

$$a+b=\frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t},ab=\frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t}.$$

据韦达定理知,以 a、b 为根的一元二次方程为

$$x^2-\frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t}x+\frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t}=0,$$

即 $(t-2\sqrt{2}r)x^2+2\sqrt{2}r^2x-2tr^2=0.$

三、设函数 $f:\mathbf{N}_+\to\mathbf{N}_+$ 满足题设条件.

对于正整数 n、k 有

$f((k+1)n)=f(kn)+f(n)+kn^2.$

令 $k=1,2,\cdots,m-1$ 并相加得

$$f(mn)=mf(n)+[1+2+\cdots+(m-1)]n^2$$
$$=mf(n)+\frac{m(m-1)}{2}n^2,$$

对所有的正整数 m、n 都成立.

特别地,当 $n=1$ 时,

$$f(m)=\frac{m(m+1)}{2}. \quad ①$$

式①定义了在正整数集合上的函数 f.

经检验,$f(m)=\dfrac{m(m+1)}{2}$ 是问题的唯一解.

四、(1)如图4,由题设知

$\angle BMA=\angle MAD=\angle BAM.$

因此,$BA=BM.$

同理,$MC=CN.$

联结 OC.

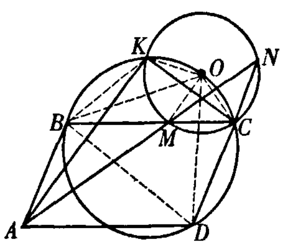

图4

则 OC 平分 $\angle NCM$.

联结 OB、OM、OD. 设 $\angle BAD=\theta$. 则

$$\angle OCD=\angle BCD+\angle OCM$$
$$=\theta+\frac{1}{2}(180^\circ-\theta)=90^\circ+\frac{\theta}{2},$$
$$\angle BMO=180^\circ-\angle OMC$$
$$=180^\circ-\angle OCM=90^\circ+\frac{\theta}{2}.$$

因此,$\angle BMO=\angle OCD.$

故 $\triangle OBM\cong\triangle ODC.$

从而,$\angle OBC=\angle ODC.$

于是,B、O、C、D 四点共圆,也就是点 O 在 $\triangle CBD$ 的外接圆上.

(2)由(1)知 $BO=OD.$

又 $KO=OC$,由 B、K、O、C 和 D 都在同一个圆上,则点 K、C 关于 BD 的中垂线对称,且

$BK=CD=AB.$

又因 $\angle KBD=\angle CDB=\angle ABD$,所以,点 K 与 A 是关于 BD 的对称点,即

$AK\perp BD.$

又因 $KC/\!/BD$,所以,$AK\perp KC$,即

$\angle AKC=90^\circ.$

五、设任意给出的七个实数为 a_i $(i=1,2,\cdots,7)$,在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内存在七个实数 θ_i,使得 $\tan\theta_i=a_i$.

将 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 等分为六个长为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的区间:

$$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right),\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right],\left(-\frac{\pi}{6},0\right),$$
$$\left[0,\frac{\pi}{6}\right],\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right],\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right).$$

根据抽屉原理,必存在 θ_i、θ_j(i、$j=1,2,\cdots,7$,且 $i\neq j$)属于同一个长为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的小区间.

不妨设 $\theta_i\geqslant\theta_j$. 则 $0\leqslant\theta_i-\theta_j\leqslant\dfrac{\pi}{6}$.

因此,$0\leqslant\tan(\theta_i-\theta_j)\leqslant\tan\dfrac{\pi}{6}$,即

$$0\leqslant\frac{\tan\theta_i-\tan\theta_j}{1+\tan\theta_i\cdot\tan\theta_j}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

令 $x=a_i$,$y=a_j$. 因而,总可以从任意给出的七个实数中,找到两个实数 x、y,使得

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(李延林 提供)

2009年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

作者： 李延林
作者单位：
刊名： 中等数学
英文刊名： HIGH-SCHOOL MATHEMATICS
年，卷(期)： 2010(5)