2002年(宇振杯)上海市初中数学竞赛

一、填空题(1~5题每小题6分,6~10题每小题8分,共70分)

1.在2 002当中嵌入一个数码组成五位数20□02.若这个五位数能被7整除,则嵌入的数码"□"是______.

2.若实数a满足$a^3<a<a^2$,则不等式$x+a>1-ax$的解为______.

3.如图1,一张矩形纸片沿BC折叠,顶点A落在点A'处,第二次过A'再折叠,使折痕$DE\parallel BC$.若$AB=2$,$AC=3$,则梯形$BDEC$的面积为______.

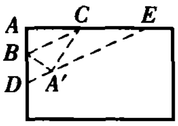

图1

4.已知关于正整数n的二次式$y=n^2+an$(a为实常数).若当且仅当$n=5$时,y有最小值,则实数a的取值范围是______.

5.如图2,在平面直角坐标系中有一个正方形$ABCD$,它的4个顶点为$A(10,0)$、$B(0,10)$、$C(-10,0)$、$D(0,-10)$.则该正方形内及边界上共有______个整点(即纵、横坐标都是整数的点).

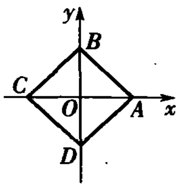

图2

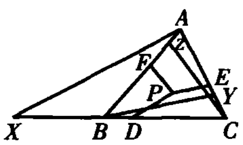

图3

6.如图3,P为$\triangle ABC$形内一点,点D、E、F分别在BC、CA、AB上.过A、B、C分别作PD、PE、PF的平行线,交对边或对边的延长线于点X、Y、Z.若$\frac{PD}{AX}=\frac{1}{4}$,$\frac{PE}{BY}=\frac{1}{3}$,则$\frac{PF}{CZ}=$______.

7.若$\triangle ABC$的三边两两不等,面积为$\frac{\sqrt{15}}{3}$,且中线AD、BE的长分别为1和2,则中线CF的长为______.

8.计算:$\frac{1^2}{1^2-100+5\,000}+\frac{2^2}{2^2-200+5\,000}+\cdots+\frac{k^2}{k^2-100k+5\,000}+\cdots+\frac{99^2}{99^2-9\,900+5\,000}=$______.

9.若正数x、y、z满足$xyz(x+y+z)=4$,则$(x+y)(y+z)$的最小可能值为______.

10.若关于x的方程$a\sqrt{x^2}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2}-\frac{1}{3}=0$恰有两个不同的实数解,则实数$a$的取值范围是______.

二、(16分)已知p为质数,使二次方程

$$x^2-2px+p^2-5p-1=0$$

的两根都是整数.求出p的所有可能值.

三、(16分)已知$\triangle XYZ$是直角边长为1的等腰直角三角形($\angle Z=90°$),它的3个顶点分别在等腰$Rt\triangle ABC$($\angle C=90°$)的三边上.求$\triangle ABC$直角边长的最大可能值.

四、(18分)平面上有7个点,它们之间可以连一些线段,使7点中的任意3点必存在2点有线段相连.问至少要连多少条线段?证明你的结论.

参考答案

一、1.2或9　2.$x<\frac{1-a}{1+a}$　3.9　4.$-11<a<-9$　5.221　6.$\frac{5}{12}$　7.$\sqrt{6}$　8.99　9.4　10.$a\geqslant0$或$a=-\frac{3}{16}$

二、因为已知整系数二次方程有整数根,所以,

$$\Delta=4p^2-4(p^2-5p-1)=4(5p+1)$$

为完全平方,从而,$5p+1$为完全平方.

令$5p+1=n^2$.注意到$p\geqslant2$,故$n\geqslant4$,且n为整数.于是,

$5p=(n+1)(n-1)$.

则$n+1$、$n-1$中至少有一个是5的倍数,即$n=5k\pm1$(k为正整数).

因此,$5p+1=25k^2\pm10k+1$,$p=k(5k\pm2)$.

由p为质数,$5k\pm2>1$,知$k=1$,$p=3$或7.

当$p=3$时,已知方程变成$x^2-6x-7=0$,

解得$x_1=-1$,$x_2=7$;

当$p=7$时,已知方程变成$x^2-14x+13=0$,

解得$x_1=1$,$x_2=13$.

所以,$p=3$或7.

三、(1)如图4,顶点Z在斜边AB上.

2002年重庆市初中数学竞赛

一、填空题(每小题5分,共35分)

1.已知$\frac{3}{x+y}=\frac{4}{y+z}=\frac{5}{z+x}$.则$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}=$______.

2.已知$\sqrt{15}-3<a<\sqrt{26}-2$.那么,满足该不等式的整数 a 是______.

3.方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+cx+d=0(a\neq c)$ 有相同的根 α.则 $\alpha=$______.

4.定义一种新运算"▲"为 x▲$y=ax+by$(a、b 为常数).若 1▲2=5,2▲3=8,那么,3▲4=______.

5.在 Rt△ABC 中,$\angle A=30°$,$\angle C=90°$,$\angle A$ 的平分线 AD 交 BC 于 D,且 $AD=\sqrt{6}$.则$\angle A$ 的对边 $BC=$______.

6.如图1,在△ABC 中,$\angle B$ 的平分线与$\angle C$ 的外角平分线相交于 D.如果$\angle A=\alpha$,那么$\angle D=$______.

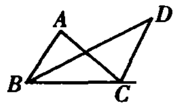

图1

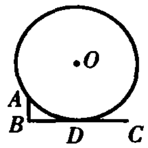

图2

7.如图2,一直角尺 ABC 与⊙O 相切于点 D,A 与⊙O 接触于点 A.测得 $AB=a$,$BD=b$.则⊙O 的半径为______.

二、选择题(每小题5分,共35分)

1.当分式$\frac{1}{-x^2+3x+4}$有意义时,x 的取值范围是(　).

取 XY 的中点 M,连 CM、ZM、CZ,并作边 AB 上的高 CN,则

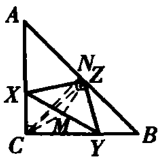

图4

$$CZ\leqslant CM+MZ$$
$$=\frac{1}{2}XY+\frac{1}{2}XY$$
$$=XY=\sqrt{2}.$$

又 $CN\leqslant CZ$,所以 $CN\leqslant\sqrt{2}$,$CA=\sqrt{2}CN\leqslant 2$.

(2)如图5,顶点 Z 在直角边 CA(或 CB)上.由对称性,不妨设 Z 在 CA 上.设 $CX=x$,$CZ=y$,并过 Y 作 $YH\perp CA$ 于 H.

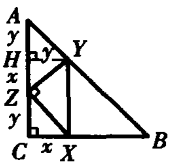

图5

易证△ZYH≌△XZC,得 $HZ=CX=x$,$HY=CZ=y$.

又显然△AHY 为等腰直角三角形,则 $AH=y$.

设 $AC=b$,则 $2y+x=b$,即 $x=b-2y$.

在△CXZ 中,由勾股定理有

$$y^2+(b-2y)^2=1^2,$$

即 $$5y^2-4by+b^2-1=0.$$

因为 y 为实数,则

$$\Delta=16b^2-20(b^2-1)=20-4b^2\geqslant 0,b\leqslant\sqrt{5}.$$

当 $b=\sqrt{5}$时,$y=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$x=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

综合(1)、(2)知,b 的最大值为 $\sqrt{5}$.

四、(1)若7个点中,有一点孤立(即它不与其他点连线),则剩下6点每2点必须连线,此时至少要连$\frac{6\times 5}{2}=15$条.

(2)若7点中,有一点只与另一点连线,则剩下5点每2点必须连线,此时至少要连 $1+\frac{5\times 4}{2}=11$ 条.

(3)若每一点至少引出3条线段,则至少要连$\frac{7\times 3}{2}$条线段.由于线段数为整数,故此时至少要连11条.

(4)若每点至少引出2条线段,且确有一点(记为 A)只引出2条线段 AB、AC,则不与 A 相连的4点每2点必须连线,要连$\frac{4\times 3}{2}=6$条.由 B 引出的线段至少有2条,即除 BA 外还至少有一条.因此,此时至少要连 $6+2+1=9$ 条.

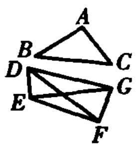

图6

图6给出连9条线的情况.

综合(1)~(4),至少要连9条线段,才能满足要求.

(李大元　刘鸿坤　曾　容　熊　斌　叶声扬命题)