

2012美国数学竞赛(八年级)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2013)06-0021-04

1. 已知罗谢尔用3磅肉做了8个汉堡,她还要为邻居野餐准备24个汉堡.则需要肉()磅.

(A)6 (B) $6\frac{2}{3}$ (C) $7\frac{1}{2}$ (D)8 (E)9

2. 在某国,统计学家们预计每8小时有一名婴儿出生,且每一天有一人死亡.则该国每年增加的人口约为()人.

(A)600 (B)700 (C)800
(D)900 (E)1000

3. 某地区白天有10小时24分钟,早上6:57日出,下午8:15日落.若日出和日落时长没错,但日落时间有误,则太阳在下午()日落.

(A)5:10 (B)5:21 (C)5:41
(D)5:57 (E)6:03

4. 皮特家买了一张12角的比萨,皮特吃了一角,并与弟弟保尔等分了另一角.则皮特吃了整张比萨的().

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

5. 一张矩形相片镶嵌在一个相框中,要求相片四周距边框2英寸.经测量,该相片高8英寸,宽10英寸.则整个相框除去相片后剩下部分的面积是()平方英寸.

(A)36 (B)40 (C)64 (D)72 (E)88

6. 伊莎贝拉要参加四次百分制的数学考试,她的目标是平均分达到95分.已知她前两次考试成绩分别为97、91分,在第三次考试后她认为能达到目标.则她第三次考试至少需要考()分.

(A)90 (B)92 (C)95 (D)96 (E)97

$$\left[\frac{a}{n} \right] > \frac{a}{n} - 1.$$

$$\text{故 } f(n) = \left[\frac{n + \left[\frac{a}{n} \right]}{2} \right]$$

$$\geq \frac{n + \left[\frac{a}{n} \right] - 1}{2} > \frac{n + \left(\frac{a}{n} - 1 \right) - 1}{2}$$

$$= \frac{n + \frac{a}{n}}{2} - 1 \geq \frac{2\sqrt{n \cdot \frac{a}{n}}}{2} - 1 = \sqrt{a} - 1.$$

12. 首先,对于任意实数 a 有

$$-(1+a^2) \leq 2a \leq 1+a^2.$$

$$\text{故 } -\frac{1}{2} \leq \frac{a}{1+a^2} \leq \frac{1}{2}.$$

把2013个互不相同的数中的每一个数

a 均写成 $\frac{a}{1+a^2}$ 的形式.

将数轴上的点 $-\frac{1}{2}$ 到点 $\frac{1}{2}$ 这个长度为1的线段2012等分,则每个小线段的长度为 $\frac{1}{2012}$.

由抽屉原理,知2013个形如 $\frac{a}{1+a^2}$ 的数中一定有两个数在某个小线段上,不妨设为

$$\frac{x}{1+x^2}, \frac{y}{1+y^2}.$$

$$\text{于是, } \left| \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right| \leq \frac{1}{2012}.$$

$$\text{故 } 2012|x-y| |1-xy| \leq (1+x^2)(1+y^2).$$

(熊斌 顾鸿达 李大元 刘鸿坤

叶声扬 命题)

7. 图1中所有的角均为直角,各线段长如图所示.在不测量的前提下, x 为().

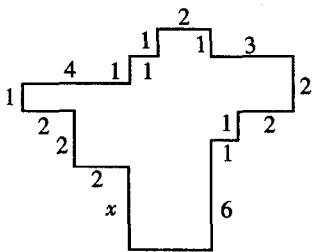


图1

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 (E)5

8. 商场广告写着“每件商品五折特卖”,并在结账时,若使用优惠券价格再降二折.则使用优惠券后,付款价格是原来的().

(A)10% (B)33% (C)40%
(D)60% (E)70%

9. 沃思堡动物园有两条腿的鸟和四条腿的哺乳动物若干.在一次游园中,玛吉统计这些动物共有200个头和522条腿.则该动物园中鸟有()只.

(A)61 (B)122 (C)139
(D)150 (E)161

10. 由2、0、1、2四个数码组成的四位数中,比1000大的共有()个.

(A)6 (B)7 (C)8 (D)9 (E)12

11. 在由正整数3、4、5、6、6、7组成的有序数列中插入一个数 m ,使得新数列的平均数与中位数相等.则 m 的值为().

(A)5 (B)6 (C)7 (D)11 (E)12

12. 13^{2012} 的个位数字是().

(A)1 (B)3 (C)5 (D)7 (E)9

13. 杰莫尔在学校书店里买了一些铅笔,每支单价超过1美分,共付了1.43美元;莎伦娜也买了同一种铅笔,付了1.87美元.则莎伦娜比杰莫尔多买了()支铅笔.

(A)2 (B)3 (C)4 (D)5 (E)6

14. 在某中学每年的足球联赛中,规定每支球队要和其他球队各赛一场.若在2012赛季所有球队共赛了21场.则参赛球队有

()支.

(A)6 (B)7 (C)8 (D)9 (E)10

15. 已知整数 $m(m > 2)$,用3、4、5、6分别除 m ,余数均为2.则 m 介于()之间.

(A)40和50 (B)51和55
(C)56和60 (D)61和65
(E)66和99

16. 十个数码0~9每个仅用一次组成两个五位数.若使两数之和最大,则其中一个数是().

(A)76 531 (B)86 724 (C)87 431
(D)96 240 (E)97 403

17. 将一个边长为正整数的正方形分成十个小正方形,使得每个小正方形边长均为正整数,且至少有八个面积为1.则原正方形边长的最小可能值为().

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

18. 有一个正整数,其既不是质数,也不是完全平方数,且没有小于50的质因子.则这样的正整数最小为().

(A)3 127 (B)3 133 (C)3 137
(D)3 139 (E)3 149

19. 在一个罐子中有红、绿、蓝三种颜色的小球.已知除去红球共有6个;除去绿球共有8个;除去蓝球共有4个.则此罐子中共有小球()个.

(A)6 (B)8 (C)9 (D)10 (E)12

20. 将 $\frac{5}{19}$ 、 $\frac{7}{21}$ 、 $\frac{9}{23}$ 按从小到大的顺序排列为().

(A) $\frac{9}{23} < \frac{7}{21} < \frac{5}{19}$ (B) $\frac{5}{19} < \frac{7}{21} < \frac{9}{23}$
(C) $\frac{9}{23} < \frac{5}{19} < \frac{7}{21}$ (D) $\frac{5}{19} < \frac{9}{23} < \frac{7}{21}$
(E) $\frac{7}{21} < \frac{5}{19} < \frac{9}{23}$

21. 玛拉有一个边长为10英尺的白色大正方体,她还有足够多的绿色油漆能涂300平方英尺.玛拉想在每个面中心画一个白色的正方形,且把所有的油漆都涂在正方形的

四周. 则每个白色正方形的面积为()平方英尺.

(A) $5\sqrt{2}$ (B) 10 (C) $10\sqrt{2}$

(D) 50 (E) $50\sqrt{2}$

22. 设集合 R 是由九个不同的整数组成的, 其中的六个元素分别是 2、3、4、6、9、14. 则集合 R 中元素的中位数可能有()个.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

23. 已知一个正三角形与正六边形的周长相同. 若正三角形的面积是 4, 则正六边形的面积是().

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $4\sqrt{3}$ (E) $6\sqrt{3}$

24. 如图 2, 将一个半径为 2 的圆等分成四段弧, 再将这四段弧围成星形. 则该图形的面积与原来圆的面积之比是().

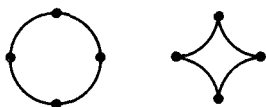


图 2

(A) $\frac{4-\pi}{\pi}$ (B) $\frac{1}{\pi}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

(D) $\frac{\pi-1}{\pi}$ (E) $\frac{3}{\pi}$

25. 如图 3, 一个面积为 4 的正方形内接于一个面积为 5 的正方形, 小正方形的每个顶点均在大正方形边上, 且每个顶点将边分成的两部分分别为 a 、 b . 则 $ab =$ ().

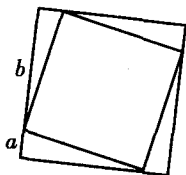


图 3

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 (E) 4

参考答案

1. E.

$$\frac{3}{8} \times 24 = 9.$$

2. B.

由 $(\frac{24}{8} - 1) \times 365 = 730$, 知每年约增加 700 人.

3. C.

由 $6:57 + 10:24 = 17:21$, 知应为下午 5:21.

4. C.

$$\frac{1.5}{12} = \frac{1}{8}.$$

5. E.

如图 4.

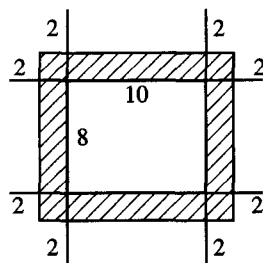


图 4

剩下部分的面积为

$$2 \times 2 \times 4 + 2 \times 8 \times 2 + 10 \times 10 \times 2 = 88.$$

6. E.

不妨设第三次考试成绩为 x . 则

$$97 + 91 + x \geq 95 \times 3 \Rightarrow x \geq 97.$$

7. E.

由 $1 + 1 + 1 + 2 + x = 1 + 2 + 1 + 6$, 解得 $x = 5$.

8. C.

设原价为 x , 现价为 $x50\% \times 80\%$.

$$\text{则 } \frac{x50\% \times 80\%}{x} \times 100\% = 40\%.$$

9. C.

设鸟和哺乳动物分别有 x 、 y 只.

由题设知

$$\begin{cases} x+y=200, \\ 2x+4y=522 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=139, \\ y=61. \end{cases}$$

10. D.

符合条件的四位数为

2 012, 2 021, 2 102, 2 120, 2 201,

2 210, 1 022, 1 202, 1 220.

11. D.

分别代入并验证得插入数为 11.

12. A.

由 $13^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$\Rightarrow 13^{2012} = (13^4)^{503} \equiv 1 \pmod{10}$.

13. C.

注意到, $(143, 187) = 11$.

则铅笔的单价是 11 的约数.

又由于单价超过 1 美分, 故每支铅笔为 11 美分, 莎伦娜比杰莫尔多买的个数为

$$\frac{187-143}{11} = 4.$$

14. B.

设有 n 支球队参加联赛.

$$\text{则 } \frac{n(n-1)}{2} = 21 \Rightarrow n = 7.$$

15. D.

$$[3, 4, 5, 6] + 2 = 62.$$

16. C.

显然, 选项 B、D、E 中的数不是按递减排列的, 其所得之和不是最大. 故只需讨论选项 A、C. 将剩下的数码组成最大的五位数并与已知数相加, 验证即知与选项 C 之和最大.

17. B.

若边长为 3, 面积为 9, 不可能分成十个边长为整数的小正方形; 若边长为 4, 则可以 (如图 5).

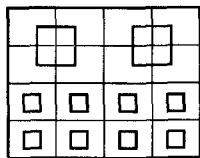


图 5

18. A.

$$53 \times 59 = 3127.$$

19. C.

设红、绿、蓝色小球的个数分别为 x 、 y 、 z .

由题意知

$$\begin{cases} y+z=6, \\ z+x=8, \\ x+y=4. \end{cases}$$

解得 $x+y+z=9$.

20. B.

$$\frac{5}{19} < \frac{5}{15} = \frac{7}{21} = \frac{9}{27} < \frac{9}{23}.$$

21. D.

$$\frac{10 \times 10 \times 6 - 300}{6} = \frac{300}{6} = 50.$$

22. C

由题设, 知九个数的中位数只可能从 3~9 这七个数中选取.

23. C.

设正三角形的边长为 a . 则正六边形的边长为 $\frac{a}{2}$.

由题意知

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

故正六边形的面积为

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2 = 6.$$

24. A.

如图 6.

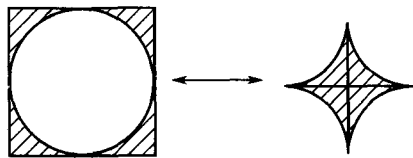


图 6

注意到, 星形图形的面积即为以 4 为边长的正方形与该圆面积之差.

故所求面积之比为

$$\frac{4^2 - 4\pi}{4\pi} = \frac{4 - \pi}{\pi}.$$

25. C.

由题意知

$$\frac{1}{2}ab \times 4 = 5 - 4.$$

$$\text{解得 } ab = \frac{1}{2}.$$

(潘 铁 翻译并解答)