# 2010 年全国初中数学竞赛(海南赛区)初赛试题及答案

(本试卷共 4 页,满分 120 分,考试时间:3 月 14 日 8:30—10:30)

**一、选择题**(本大题满分 50 分,每小题 5 分)

在下列各题的四个备选答案中,只有一个是正确的,请把你认为正确的答案的字母代号填写在下表相应题号下的方格内

1. 若 x 为实数,则代数式 $|x| - x$ 的值一定是

A. 正数　　B. 非正数

C. 非负数　　D. 负数

2. 已知 $(a+b)^2 = 8$, $(a-b)^2 = 12$,则 $ab$ 的值为

A. 1　　B. $-1$　　C. 4　　D. $-4$

3. 若 $bk < 0$,则直线 $y = kx + b$ 一定通过

A. 第一、二象限　　B. 第二、三象限

C. 第三、四象限　　D. 第一、四象限

4. 甲、乙两人下棋,甲获胜的概率为 30 %,和棋的概率为 50 %,那么乙不输的概率为

A. 20 %　　B. 50 %　　C. 70 %　　D. 80 %

5. 已知 $2010^{2011} - 2010^{2009} = 2010^x \times 2009 \times 2011$,那么 $x$ 的值是

A. 2008　　B. 2009　　C. 2010　　D. 2011

6. 一项工程,甲建筑队单独承包需要 $a$ 天完成,乙建筑队单独承包需要 $b$ 天完成. 现两队联合承包,那么完成这项工程需要

A. $\frac{1}{a+b}$天　　B. $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$天　　C. $\frac{ab}{a+b}$天

D. $\frac{1}{ab}$天

7. 在平面上,如果点 $A$ 和点 $B$ 到点 $C$ 的距离分别为 3 和 4,那么 $A$、$B$ 两点的距离 $d$ 应该是

A. $d = 1$　　B. $d = 5$　　C. $d = 7$　　D. $1 \le d \le 7$

8. 如图 1,在直角梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90°$,动点 $P$ 从点 $B$ 出发,沿 $B \to C \to D$ 的线路匀速运动至点 $D$ 停止. 设点 $P$ 运动的路程为 $x$, $\triangle ABP$ 的面积为 $y$,如果 $y$ 关于 $x$ 的函数图象如图 2 所示,则 $\triangle BCD$ 的面积是

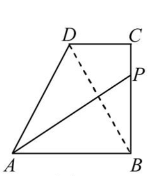


图 1

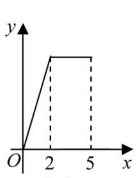
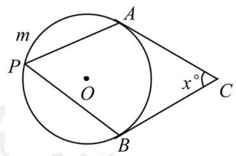


图 2

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

9. 如图 3, $C$ 是 ⊙$O$ 外一点, $CA$、$CB$ 分别与 ⊙$O$ 相切于点 $A$、$B$, $P$ 是 $\overset{\frown}{AMB}$ 上一点,若 $\angle C = x°$,则 $\angle APB$ 的度数是




A. $x°$

B. $(90 - \frac{x}{2})°$

C. $(90 - x)°$

D. $(180 - x)°$

10. 如图 4,在等腰直角三角形 $ABC$ 中, $\angle C = 90°$, $D$ 为 $BC$ 的中点,将 $\triangle ABC$ 折叠,使点 $A$ 与点 $D$ 重合, $EF$ 为折痕,则 $\sin\angle BED$ 的值是

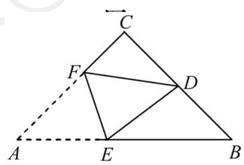


图 4

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{7}$

**二、填空题**(本大题满分 40 分,每小题 5 分)

11. 已知点 $P$ 在直角坐标系中的坐标为 $(0,1)$, $O$ 为坐标原点, $\angle QPO = 150°$,且 $P$ 到 $Q$ 的距离为 2,则 $Q$ 的坐标为________.

12. 点 $A$, $B$ 是在数轴上不同的两个点,它们所对应的数分别是 $-4$, $\frac{2x+2}{3x-5}$,且点 $A$、$B$ 到原点的距离相等,则 $x$ 的值为________.

13. 50 名学生中,会讲英语的有 36 人,会讲日语的有 20 人,既不会讲英语也不会讲日语的有 8 人,则既会讲英语又会讲日语的人数为人________.

14. 已知 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$,且 $x < 0$,则 $x + \frac{1}{x}$ 的值是________.

15. 设 $c < b < 0 < a$, $a + b + c = 1$, $M = \frac{b+c}{a}$, $N = \frac{a+c}{b}$, $P = \frac{a+b}{c}$,则 $M$, $N$, $P$ 之间的关系是.

16. 如图 5,已知矩形 $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $MB$

$= MC$,则点 $D$ 到 $AM$ 的距离为______.

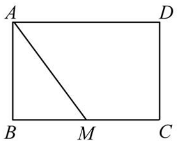



图 5

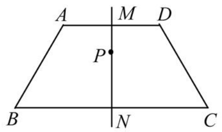



图 6

17. 如图 6,在梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$AB = CD = AD = 1$,$\angle B : \angle A = 1 : 2$,$M$、$N$ 分别是 $AD$、$BC$ 的中点,$P$ 是直线 $MN$ 上的一点,则 $PC + PD$ 的最小值为______.

18. 如图 7,在平行四边形 $ABCD$ 中,$P$ 为 $BC$ 上任一点,连结 $DP$ 并延长交 $AB$ 延长线于 $Q$,则 $\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} =$______.

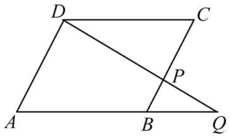



图 7

三、解答题(本大题满分 30 分,每小题 15 分)

19. 如图 8,$\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形,$P$ 是 $AB$ 边上的一个动点($P$ 与 $B$ 不重合),以线段 $CP$ 为边作等边 $\triangle CPD$($D$、$A$ 在 $BC$ 的同侧),连结 $AD$.

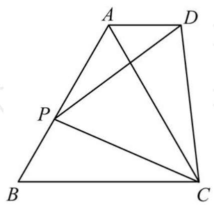



图 8

(1) 判断四边形 $ABCD$ 的形状,并给予证明;

(2) 设 $BP = x$,$\triangle PAD$ 的面积为 $y$,求出 $y$ 关于 $x$ 的函数关系式,并求出 $\triangle PAD$ 面积的最大值及取得最大值时 $x$ 的值.

20. 某单位欲购买 $A$、$B$ 两种电器. 根据预算,共需资金 15750 元. 购买一件 $A$ 种电器和两件 $B$ 种电器共需资金 2300 元;购买两件 $A$ 种电器和一件 $B$ 种电器共需资金 2050 元.

(1) 购买一件 $A$ 种电器和一件 $B$ 种电器所需的资金分别是多少元?

(2) 若该单位购买 $A$ 种电器不超过 5 件,则可购买 $B$ 种电器至少有多少件?

(3) 为节省开支,该单位只购买 $A$、$B$ 两种电器共 6 件,并知道获政府补贴资金不少于 700 元;自己出资金不超过 4000 元;其中政府对 $A$、$B$ 两种电器补贴资金分别为每件 100 元和 150 元. 请你通过计算求出有几种购买方案?

# 参考答案

**一、选择题**

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | B | D | C | B | C | D | A | B | A |

提示:

1. 若 $x \geq 0$,则 $|x| - x = x - x = 0$;若 $x < 0$,则 $|x| - x = -x - x = -2x > 0$,故选 C.

2. 由题意有 $a^2 + 2ab + b^2 = 8$,$a^2 - 2ab + b^2 = 12$,两式相减得 $4ab = -4$,得 $ab = -1$,故选 B.

3. 由 $bk < 0$,知 $b > 0$,$k < 0$ 或 $b < 0$,$k > 0$,前者直线经过第一、二、四象限,后者直线经过第一、三、四象限,因而必经过第一、四象限,选 D.

4. 由已知条件知乙胜的概率为 20 %,又和棋概率为 50 %,故乙不输的概率为 70 %,选 C.

5. 由 $2010^{2011} - 2010^{2009} = 2010^x \times 2009 \times 2011$,

$2010^{2009}(2010 - 1)(2010 + 1) = 2010^x \times 2009 \times 2011$,

则有 $2010^{2009} \times 2009 \times 2011 = 2010^x \times 2009 \times 2011$,则有 $x = 2009$,选 B.

6. 两队联合承包每天完成工程的 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$,完成这项工程需要的时间为 $1 \div (\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = \frac{ab}{a + b}$ 天. 选 C.

7. 根据题意可知符合条件的点 $A$ 和点 $B$ 分别在以点 $C$ 为圆心的两个同心圆上. 故选 D.

8. 由图象可知,直角梯形的高 $BC = 2$,上底 $CD = 3$,所以 $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$,选 A.

9. 分别连结 $OA$、$OB$,则 $OA \perp CA$,$OB \perp CB$,即可求得,选 B.

10. 由已知条件知 $\angle EDF = 45°$,由三角形外角性质得 $\angle CDF + 45° = \angle BED + 45°$,$\therefore \angle BED = \angle CDF$,设 $CD = 1$,$CF = x$,则 $CA = CB = 2$,所以 $DF = FA = 2 - x$,在 $Rt\triangle CDF$ 中,有 $x^2 + 1 = (2 - x)^2$,解得 $x = \frac{3}{4}$,所以 $\sin\angle BED = \sin\angle CDF = \frac{CF}{DF} = \frac{3}{5}$,选 A.

**二、填空题**

11. $(1, 1 + \sqrt{3})$ 或 $(-1, 1 + \sqrt{3})$;在直角坐标系中,以 $P(0,1)$ 为顶点,作出 $\angle QPO = 150$ 可求得.

12. 由 $\frac{2x+2}{3x-5}=4$ 解得 $x=\frac{11}{5}$.

13. 英语、日语至少会一门的人数为 $50-8=42$ 人,设既会英语又会日语的为 $x$ 人,则只会英语的为 $(36-x)$ 人;只会日语的为 $(20-x)$ 人,于是得 $(36-x)+x+(20-x)=42$,解得 $x=14$.

14. 由 $x^2+\frac{1}{x^2}=3$,得 $x^2+2+\frac{1}{x}=5$,所以 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=5$,又 $x<0$,所以 $x+\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$.

15. 由 $a+b+c=1$ 可得 $1+\frac{b+c}{a}=\frac{1}{a}$,则 $M=\frac{b+c}{a}=\frac{1}{a}-1$,同理 $N=\frac{a+c}{b}=\frac{1}{b}-1$, $P=\frac{a+b}{c}=\frac{1}{c}-1$,由 $c<b<0<a$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}-1>\frac{1}{c}-1>\frac{1}{b}-1$, ∴ $M>P>N$.

16. 过 $D$ 作 $DG\perp AM$,则有 $2\times3=\frac{1}{2}AM\cdot DG+\frac{AB\cdot BM}{2}\times2$, $DG=2.4$;

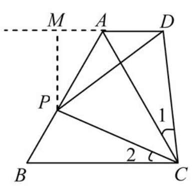
17. $\sqrt{3}$;当 $P$ 在对角线 $AC$ 与 $MN$ 的交点处时 $PC+PD$ 最小.

18. 1; ∵ $\frac{BC}{BP}=\frac{AD}{BP}=\frac{AQ}{BQ}$,

∴ $\frac{BC}{BP}-\frac{AB}{BQ}=\frac{AQ}{BQ}-\frac{AB}{BQ}=\frac{AQ-AB}{BQ}=\frac{BQ}{BQ}=1$.

三、解答题

19. (1)四边形 $ABCD$ 是梯形或菱形,证明如下:




①当点 $P$ 不与点 $A$ 重合时,

∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle CPD$ 都是等边三角形,

∴ $\angle ACB=\angle DCP=60°$,

∴ $\angle1=\angle2$,

又 $AC=BC$, $DC=PC$,

∴ $\triangle ADC\cong\triangle BPC$,

∴ $\angle DAC=\angle B=\angle BCA=60°$,

∴ $AD\parallel BC$.

又 $\angle1=\angle2<60°$,

∴ $\angle DCB<120°$,

即 $\angle B+\angle DCB<180°$,

∴ $DC$ 与 $AB$ 不平行,

∴四边形 $ABCD$ 是梯形.

②当点 $P$ 与点 $A$ 重合时, $PC$ 与 $AC$ 重合,此时 $AB=BC=CA=AD=DC$,四边形 $ABCD$ 是菱形,综上所述,四边形 $ABCD$ 是梯形或菱形.

(2)由(1)知 $\angle BAD=120°$, $AD=BP=x$,过 $P$ 作 $DA$ 延长线的垂线 $PM$, $M$ 为垂足,则 $\angle PAM=60°$, $\angle APM=30°$,

又 $BP=x$, $AB=1$, ∴ $AP=1-x$, ∴ $AM=\frac{1}{2}(1-x)$, $PM=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$

∴ $y=\frac{1}{2}AD\cdot PM=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{16}(0<x<1)$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $y$ 取最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{16}$,即当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $\triangle PAD$ 面积取得最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

20. (1)设购买一件 $A$ 种电器和一件 $B$ 种电器所需的资金分别为 $a$ 元和 $b$ 元.

依题意得 $\begin{cases}a+2b=2300\\2a+b=2050\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}a=600\\b=850\end{cases}$ (答略)

(2)设该单位购买 $A$、$B$ 两种电器分别为 $m$ 件和 $n$ 件.则

$600m+850n=15750$, $m=-\frac{17}{12}n+\frac{315}{15}$.

∵ $A$ 种电器不超过5件,

∴ $-\frac{17}{12}n+\frac{315}{15}\leq5$.

∴ $n\geq15$,即可购买 $B$ 种电器至少有15件.

(3)设购买 $A$ 种电器 $x$ 件,则购买 $B$ 种电器为 $(6-x)$ 件,依题意得:

$\begin{cases}500x+700(6-x)\leq4000\\100x+150(6-x)\geq700\end{cases}$,解之得 $1\leq x\leq4$.

∵ $x$ 取整数, ∴ $x=1,2,3,4$. 即共有4种购买方案.

(国兴中学 冼词学提供)