解:两式相减,得

$$\left(\frac{2}{x^2}+y^2\right)\left(\frac{2}{x^2}-y^2\right)-\left(\frac{2}{x^2}+y^2\right)=0,$$

$$\left(\frac{2}{x^2}+y^2\right)\left(\frac{2}{x^2}-y^2-1\right)=0.$$

$\because \left(\frac{2}{x^2}+y^2\right)\neq 0,$

$\therefore \frac{2}{x^2}-y^2=1.$

两式相加,得 $\frac{4}{x^4}+y^4-\frac{2}{x^2}+y^2=6.$

$\therefore \frac{4}{x^4}+y^4=6+\frac{2}{x^2}-y^2=7.$

∴ 选 A.

四、整体相乘

例 7.(2003 年全国初中竞赛)若实数 $x,y,z$ 满足 $x+\frac{1}{y}=4$,$y+\frac{1}{z}=1$,$z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$,则 $xyz$ 的值为________.

解:三式相乘,得

$$xyz+\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(y+\frac{1}{z}\right)+\left(z+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{xyz}=\frac{28}{3}.$$

$\therefore xyz+\frac{1}{xyz}=2.$

$\therefore (xyz-1)^2=0.$

$\therefore xyz=1.$

例 8.(2004 年全国初中竞赛)若实数 $a,b,x,y$ 满足 $a+b=x+y=2$,$ax+by=5$,则 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=$________.

解:$(a+b)(x+y)=(ax+by)+(ay+bx)=4.$

$\because ax+by=5,$ ①

$\therefore ay+bx=-1.$ ②

∴ ①×②,得 $(a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=-5.$

# 2010 年全国初中数学竞赛(海南赛区)初赛试题

(本试题满分 120 分,考试时间:120 分钟)

一、选择题(本大题满分 50 分,每小题 5 分)

1. 若 $x$ 为实数,则代数式 $|x|-x$ 的值一定是

A. 正数　B. 非正数

C. 非负数　D. 负数

2. 已知 $(a+b)^2=8$,$(a-b)^2=12$,则 $ab$ 的值为

A. 1　B. $-1$　C. 4　D. $-4$

3. 若 $bk<0$,则直线 $y=kx+b$ 一定通过

A. 第一、二象限　B. 第二、三象限

C. 第三、四象限　D. 第一、四象限

4. 甲、乙两人下棋,甲获胜的概率为 30%,和棋的概率为 50%,那么乙不输的概率为

A. 20%　B. 50%　C. 70%　D. 80%

5. 已知 $2010^{2011}-2010^{2009}=2010^x\times 2009\times 2011$,那么 $x$ 的值是

A. 2008　B. 2009　C. 2010　D. 2011

6. 一项工程,甲建筑队单独承包需要 $a$ 天完成,乙建筑队单独承包需要 $b$ 天完成. 现两队联合承包,那么完成这项工程需要

A. $\frac{1}{a+b}$天　B. $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$天

C. $\frac{ab}{a+b}$天　D. $\frac{1}{ab}$天

7. 在平面上,如果点 $A$ 和点 $B$ 到点 $C$ 的距离分别为 3 和 4,那么 $A,B$ 两点的距离 $d$ 应该是

A. $d=1$　B. $d=5$　C. $d=7$　D. $1\leqslant d\leqslant 7$

8．如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$\angle ABC = 90°$，动点 $P$ 从点 $B$ 出发，沿 $B \to C \to D$ 的线路匀速运动至点 $D$ 停止．设点 $P$ 运动的路程为 $x$，$\triangle ABP$ 的面积为 $y$，如果 $y$ 关于 $x$ 的函数图象如图 2 所示，则 $\triangle BCD$ 的面积是

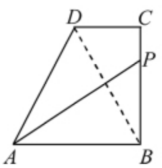


图 1

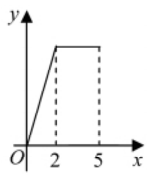


图 2

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

9．如图 3，$C$ 是 $\odot O$ 外一点，$CA$，$CB$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 $A$，$B$，$P$ 是 $\overset{\frown}{AmB}$ 上一点，若 $\angle C = x°$，则 $\angle APB$ 的度数是

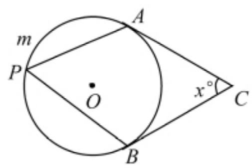


图 3

A．$x°$

B．$(90-\frac{x}{2})°$　　C．$(90-x)°$　　D．$(180-x)°$

10．如图 4，在等腰直角三角形 $ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$D$ 为 $BC$ 的中点，将 $\triangle ABC$ 折叠，使点 $A$ 与点 $D$ 重合，$EF$ 为折痕，则 $\sin\angle BED$ 的值是

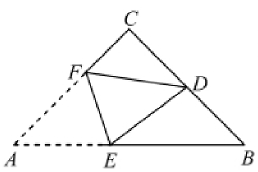


图 4

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{7}$

二、填空题（本大题满分 40 分，每小题 5 分）

11．已知点 $P$ 在直角坐标系中的坐标为 $(0,1)$，$O$ 为坐标原点，$\angle QPO = 150°$，且 $P$ 到 $Q$ 的距离为 2，则 $Q$ 的坐标为________．

12．点 $A$，$B$ 是在数轴上不同的两个点，它们所对应的数分别是 $-4$，$\frac{2x+2}{3x-5}$，且点 $A$，$B$ 到原点的距离相等，则 $x$ 的值为________．

13．50 名学生中，会讲英语的有 36 人，会讲日语的有 20 人，既不会讲英语也不会讲日语的有 8 人，则既会讲英语又会讲日语的人数为________人．

14．已知 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$，且 $x < 0$，则 $x + \frac{1}{x}$ 的值是________．

15．设 $c < b < 0 < a$，$a + b + c = 1$，$M = \frac{b+c}{a}$，$N = \frac{a+c}{b}$，$P = \frac{a+b}{c}$，则 $M$，$N$，$P$ 之间的关系是__________．

16．如图 5，已知矩形 $ABCD$，$AB = 2$，$BC = 3$，$MB = MC$，则点 $D$ 到 $AM$ 的距离为______．

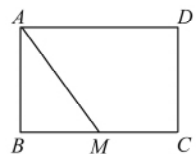


图 5

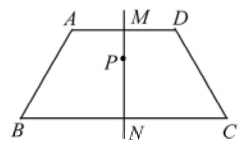


图 6

17．如图 6，在梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AB = CD = AD = 1$，$\angle B : \angle A = 1 : 2$，$M$，$N$ 分别是 $AD$，$BC$ 的中点，$P$ 是直线 $MN$ 上的一点，则 $PC + PD$ 的最小值为________．

18．如图 7，在平行四边形 $ABCD$ 中，$P$ 为 $BC$ 上任一点，连结 $DP$ 并延长交 $AB$ 延长线于 $Q$，则 $\frac{BC}{BP} - \frac{AB}{BQ} =$________．

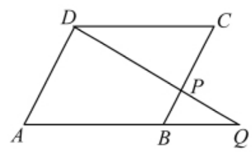


图 7

三、解答题（本大题满分 30 分，每小题 15 分）

19．如图 8，$\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形，$P$ 是 $AB$ 边上的一个动点（$P$ 与 $B$ 不重合），以线段 $CP$ 为边作等边 $\triangle CPD$（$D$，$A$ 在 $BC$ 的同侧），连结 $AD$．

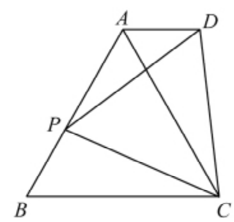


图 8

（1）判断四边形 $ABCD$ 的形状，并给予证明；

（2）设 $BP = x$，$\triangle PAD$ 的面积为 $y$，求出 $y$ 关于 $x$

的函数关系式，并求出$\triangle PAD$面积的最大值及取得最大值时$x$的值.

20. 某单位欲购买$A,B$两种电器. 根据预算，共需资金15750元. 购买一件$A$种电器和两件$B$种电器共需资金2300元；购买两件$A$种电器和一件$B$种电器共需资金2050元.

(1)购买一件$A$种电器和一件$B$种电器所需的资金分别是多少元？

(2)若该单位购买$A$种电器不超过5件，则可购买$B$种电器至少有多少件？

(3)为节省开支，该单位只购买$A,B$两种电器共6件，并知道获政府补贴资金不少于700元；自己出资金不超过4000元；其中政府对$A,B$两种电器补贴资金分别为每件100元和150元. 请你通过计算求出有几种购买方案？

## 参考答案

**一、选择题**

提示：

1. 若$x\geqslant 0$，则$|x|-x=x-x=0$；若$x<0$，则$|x|-x=-x-x=-2x>0$，故选C.

2. 由题意有$a^2+2ab+b^2=8$，$a^2-2ab+b^2=12$，两式相减得$4ab=-4$，得$ab=-1$，故选B.

3. 由$bk<0$，知$b>0,k<0$或$b<0,k>0$，前者直线经过第一、二、四象限，后者直线经过第一、三、四象限，因而必经过第一、四象限，选D.

4. 由已知条件知乙胜的概率为20%，又和棋概率为50%，故乙不输的概率为70%，选C.

5. 由$2010^{2011}-2010^{2009}=2010^x\times 2009\times 2011$，

$2010^{2009}(2010-1)(2010+1)=2010^x\times 2009\times 2011$，

则有$2010^{2009}\times 2009\times 2011=2010^x\times 2009\times 2011$，则有$x=2009$，选B.

6. 两队联合承包每天完成工程的$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，完成这项工程需要的时间为$1\div(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{ab}{a+b}$天. 选C.

7. 根据题意可知符合条件的点$A$和点$B$分别在以点$C$为圆心的两个同心圆上. 故选D.

8. 由图象可知，直角梯形的高$BC=2$，上底$CD=3$，所以$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$，选A.

9. 分别连结$OA,OB$，则$OA\perp CA,OB\perp CB$，即可求得，选B.

10. 由已知条件知$\angle EDF=45^\circ$，由三角形外角性质得$\angle CDF+45^\circ=\angle BED+45^\circ$，∴ $\angle BED=\angle CDF$. 设$CD=1,CF=x$，则$CA=CB=2$，所以$DF=FA=2-x$，在$\mathrm{Rt}\triangle CDF$中，有$x^2+1=(2-x)^2$，解得$x=\frac{3}{4}$，所以$\sin\angle BED=\sin\angle CDF=$，选A.

**二、填空题**

11. $(1,1+\sqrt{3})$或$(-1,1+\sqrt{3})$；在直角坐标系中，以$P(0,1)$为顶点，作出$\angle QPO=150^\circ$可求得.

12. 由$\frac{2x+2}{3x-5}=4$解得$x=\frac{11}{5}$.

13. 英语、日语至少会一门的人数为$50-8=42$人，设既会英语又会日语的为$x$人，则只会英语的为$(36-x)$人；只会日语的为$(20-x)$人，于是得$(36-x)+x+(20-x)=42$，解得$x=14$.

14. 由$x^2+\frac{1}{x^2}=3$，得$x^2+2+\frac{1}{x}=5$，所以$(x+\frac{1}{x})^2=5$. 又$x<0$，所以$x+\frac{1}{x}=-\sqrt{5}$.

15. 由$a+b+c=1$可得$1+\frac{b+c}{a}=\frac{1}{a}$，则$M=\frac{b+c}{a}$

$=\frac{1}{a}-1$,同理 $N=\frac{a+c}{b}=\frac{1}{b}-1$,$P=\frac{a+b}{c}=\frac{1}{c}-1$.

由 $c<b<0<a$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}>\frac{1}{b}$,$\frac{1}{a}-1>\frac{1}{c}-1>\frac{1}{b}-1$,$\therefore$ $M>P>N$.

16. 过 $D$ 作 $DG\perp AM$,则有

$2\times3=\frac{1}{2}AM\cdot DG+\frac{AB\cdot BM}{2}\times2$,$DG=2.4$.

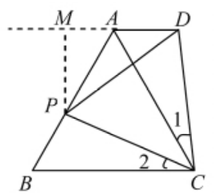
17. $\sqrt{3}$;当 $P$ 在对角线 $AC$ 与 $MN$ 的交点处时 $PC+PD$ 最小.

18. 1;$\because$ $\frac{BC}{BP}=\frac{AD}{BP}=\frac{AQ}{BQ}$,

$\therefore$ $\frac{BC}{BP}-\frac{AB}{BQ}=\frac{AQ}{BQ}-\frac{AB}{BQ}=\frac{AQ-AB}{BQ}=\frac{BQ}{BQ}=1$.

三、解答题

19. (1)四边形 $ABCD$ 是梯形或菱形,证明如下:




①当点 $P$ 不与点 $A$ 重合时,

$\because$ $\triangle ABC$ 与$\triangle CPD$ 都是等边三角形,

$\therefore$ $\angle ACB=\angle DCP=60^\circ$,$\therefore$ $\angle1=\angle2$.

又 $AC=BC$,$DC=PC$,$\therefore$ $\triangle ADC\cong\triangle BPC$,

$\therefore$ $\angle DAC=\angle B=\angle BCA=60^\circ$,

$\therefore$ $AD/\!/BC$.

又$\angle1=\angle2<60^\circ$,

$\therefore$ $\angle DCB<120^\circ$,即$\angle B+\angle DCB<180^\circ$,

$\therefore$ $DC$ 与 $AB$ 不平行,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形.

②当点 $P$ 与点 $A$ 重合时,$PC$ 与 $AC$ 重合,此时 $AB=BC=CA=AD=DC$,四边形 $ABCD$ 是菱形,综上所述,四边形 $ABCD$ 是梯形或菱形.

(2)由(1)知$\angle BAD=120^\circ$,$AD=BP=x$,过 $P$ 作 $DA$ 延长线的垂线 $PM$,$M$ 为垂足,则$\angle PAM=60^\circ$,$\angle APM=30^\circ$.

又 $BP=x$,$AB=1$,$\therefore$ $AP=1-x$,

$\therefore$ $AM=\frac{1}{2}(1-x)$,$PM=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.

$\therefore$ $y=\frac{1}{2}AD\cdot PM=\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2-x)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{\sqrt{3}}{16}(0<x<1)$.

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,$y$ 取最大值为$\frac{\sqrt{3}}{16}$,即当 $x=\frac{1}{2}$ 时 $\triangle PAD$ 面积取得最大面积为$\frac{\sqrt{3}}{16}$.

20.(1)设购买一件 $A$ 种电器和一件 $B$ 种电器所需的资金分别为 $a$ 元和 $b$ 元.依题意得

$\begin{cases}a+2b=2300,\\2a+b=2050.\end{cases}$ 解之得$\begin{cases}a=600,\\b=850.\end{cases}$(答略)

(2)设该单位购买 $A$,$B$ 两种电器分别为 $m$ 件和 $n$ 件.则

$$600m+850n=15750,m=-\frac{17}{12}n+\frac{315}{15}.$$

$\because$ $A$ 种电器不超过 5 件,

$\therefore$ $-\frac{17}{12}n+\frac{315}{15}\leqslant5$.

$\therefore$ $n\geqslant15$,即可购买 $B$ 种电器至少有 15 件.

(3)设购买 $A$ 种电器 $x$ 件,则购买 $B$ 种电器为$(6-x)$件,依题意得:

$$\begin{cases}500x+700(6-x)\leqslant4000,\\100x+150(6-x)\geqslant700.\end{cases}$$

解之得 $1\leqslant x\leqslant4$.

$\because$ $x$ 取整数,$\therefore$ $x=1,2,3,4$.即共有 4 种购买方案.