数学竞赛中的集合问题

韩 保 席

(江苏省吴江市高级中学,215200)

(本讲适合高中)

1 关于集合的概念与运算

例 1 若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$,$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq(A\cap B)$ 成立的所有 a 的集合是( ).

(A) $\{a|1\leqslant a\leqslant 9\}$ (B) $\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$

(C) $\{a|a\leqslant 9\}$ (D) $\varnothing$

(1998,全国高中数学联赛)

解:根据 $A\subseteq(A\cap B)$ 可知 $A\subseteq B$,如图 1 所示.

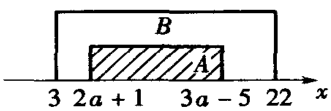

图 1

从而,

$$\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22,\\3a-5\geqslant 2a+1\end{cases}$$

$\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9$,即 $a\in\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$.

故选(B).

注:借助韦恩图或数轴可直观地表示出集合与集合的关系,使题设更加清晰、明了.

例 2 设集合 $M=\{u|u=12m+8n+4l,m、n、l\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{u|u=20p+16q+12r,p、q、r\in\mathbf{Z}\}$. 试证:$M=N$.

解:对 N 中任一元素 u,有

$$u=20p+16q+12r$$
$$=12r+8(2q)+4(5p)\in M,$$

从而,$N\subseteq M$.

另一方面,对 M 中任一元素 u,有

$$u=12m+8n+4l$$
$$=20n+16l+12(m-n-l)\in N,$$

从而,$M\subseteq N$.

综上所述,$M=N$.

注:利用"若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则 $A=B$"是证明集合相等的有效方法.

2 有关子集的问题

在数学竞赛中常出现与子集有关的问题,如子集的个数、子集的运算、满足某种条件的子集中元素的个数等.

例 3 集合 $\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\right\}$ 的真子集的个数是______.

(1996,全国高中数学联赛)

解:$A=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\right\}$

$=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant-\log_x 10<-\frac{1}{2},x\in\mathbf{N}_+\right\}$

$=\{x|1\leqslant\lg x<2,x\in\mathbf{N}_+\}$

$=\{x|10\leqslant x<100,x\in\mathbf{N}_+\}$.

对一个集合,如果该集合有 n 个元素,则其子集个数为 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$,真子集个数为 2^n-1,从而,集合 A 中有 90 个元素,有 $2^{90}-1$ 个真子集.

例 4 已知集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. 求该集合具有下列性质的子集个数:每个子集至少含有 2 个元素,且每个子集中任意两个元素之差的绝对值大于 1.

(1996,上海市高中数学竞赛)

解:设 a_n 为集合$\{1,2,\cdots,n\}$的具有题设性质的子集个数,则$\{1,2,\cdots,k,k+1,k+2\}$的具有题设性质的子集可分为两类,第一类子集中不含有 $k+2$,这类子集有 a_{k+1} 个;第二类子集中含有 $k+2$,这类子集或为$\{1,2,\cdots,k\}$的相应子集与$\{k+2\}$的并,或为$\{1,2,\cdots,k\}$的单元子集与$\{k+2\}$的并,共有

收稿日期:2004-01-08

a_k+k个.

于是，$a_{k+2}=a_{k+1}+a_k+k$.

显然，$a_3=1$，$a_4=3$.

从而，$a_5=7$，$a_6=14$，$a_7=26$，$a_8=46$，$a_9=79$，$a_{10}=133$.

3 集合中元素的个数问题

例5 设 $M=\{1,2,\cdots,1995\}$，A 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$. 则 A 中元素的个数最多是______.

(1995，全国高中数学联赛)

解：由题设知，k 与 $15k$ 这两个数中至少有一个不属于 A.

由于$\left[\frac{1995}{15}\right]=133$，所以，$k=134,135,\cdots,1995$ 时，$15k$ 一定不属于 A.

同理，$\left[\frac{133}{15}\right]=8$，当 $k=9,10,\cdots,133$ 时，k 与 $15k$ 不能同时属于 A，此时至少有 $133-8=125$ 个数不属于 A. 于是，

$|A|\leqslant 1995-125=1870$.

又可取 $A=\{1,2,\cdots,8\}\cup\{134,135,\cdots,1995\}$，所以，$|A|$ 的最大值为 1870.

例6 已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x)\leqslant 2x^2f\left(\frac{x}{2}\right)$. 如果 $A=\{a\mid f(a)>a^2\}\neq\varnothing$，求证：$A$ 是无限集.

(1994，江苏省高中数学竞赛)

解：在 $f^2(x)\leqslant 2x^2f\left(\frac{x}{2}\right)$ 中，令 $x=0$，可得 $f^2(0)\leqslant 0$. 所以，$f(0)=0$，$0\notin A$.

于是必有一个实数 $a(a\neq 0)$，使 $a\in A$，即 $f(a)>a^2$. 由已知

$$f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{a^4}{2a^2}>\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故$\frac{a}{2}\in A$.

同理，$\frac{a}{4}$，$\frac{a}{8}$，$\cdots$，$\frac{a}{2^n}$，$\cdots$均是 A 的元素.

所以，A 是无限集.

注：要证明集合 $X=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$ 是无限集，只要 X 有一个元素 x，则 X 一定还有比 x 大(小)的元素，这样一来 X 中就可以有无限个元素了.

4 集合或元素的配对问题

解这类问题，有时需要利用对应与映射的方法将集合中的元素两两配对，从而解决问题.

例7 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1000\}$，现对 M 的任一非空子集 X，令 a_x 表示 X 中最大数与最小数之和. 那么，所有这样的 a_x 的算术平均值为______.

(1991，全国高中数学联赛)

分析：对于集合 M 的任意一个子集 $X=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$，不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_k$，则必存在另一个子集 $X'=\{1001-b_1,1001-b_2,\cdots,1001-b_k\}$，这时

$a_x=b_1+b_k$，

$a_{x'}=(1001-b_1)+(1001-b_n)$

$=2002-b_1-b_k$，

a_x 与 a_x 的算术平均值为 1001.

解：将 M 中非空子集进行配对，对每个非空集合 $X\subset M$，$X'=\{1001-x\mid x\in X\}$，则 $X'\subset M$.

如果 $X\neq X'$，那么，$a_x+a_{x'}=2002$.

如果 $X=X'$，则必有 $a_x=1001$.

综上所述，所有这样的 a_x 的算术平均值为 1001.

例8 设集合 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数之和称为 X 的“容量”(规定空集的容量为 0). 若 X 的容量为奇(偶)数，则称 X 为 S_n 的奇(偶)子集. 求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

(1992，全国高中数学联赛)

分析：如能建立起 S_n 的奇子集与偶子集之间的一一对应关系，则说明二者个数相等.

证明：对于 S_n 的任一个偶子集 B，令

$$A=\begin{cases}B\cup\{1\}, & 1\notin B\text{ 时},\\ B\setminus\{1\}, & 1\in B\text{ 时}.\end{cases}$$

于是，A 为 S_n 的奇子集.

反之，对 S_n 的任一个奇子集 A，取

$$B=\begin{cases}A\cup\{1\}, & 1\notin A \text{ 时},\\ A\setminus\{1\}, & 1\in A \text{ 时}.\end{cases}$$

则得 S_n 的任一个偶子集 B.

这说明在 S_n 的奇子集与偶子集之间建立了一个一一对应关系,因此,S_n 的奇子集与偶子集个数相等.

注:运用对应证明集合或元素数量相等是一种常用的方法.

5 集合的划分问题

首先给出集合划分的概念.

设集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 A 的一族非空子集,且满足

(1) 对 $1\le i<j\le n$,均有 $A_i\cap A_j=\varnothing$;

(2) $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 A 的一个划分.

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 仅满足条件(2),则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合 A 的一个覆盖.

例 9 设 S 为集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 具有下列性质的子集:S 中任意两个不同元素之和不能被 7 整除.那么,S 中元素最多可能有多少个?

(第 43 届美国中学数学竞赛)

解:对于两个不同的自然数 a 与 b,如果 $7\nmid(a+b)$,那么,它们被 7 除所得的余数的和不为 0.所以,可将集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 按被 7 除所得的余数划分为 7 个子集.其中 A_i 中的每个元素除以 7 后的余数为 i ($i=1,2,\cdots,6$),则

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$,

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$,

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$,

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$,

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$.

根据题意得:

(1) S 最多含有 A_0 的一个元素;

(2) S 含 A_i 的一个元素,则可以含有这个集合的所有元素,但不能同时含有 A_{7-i} 的元素;

(3) A_1 含有 8 个元素,而其他子集中只有 7 个元素,故最大的子集 S 必含 A_1 的所有元素.

综上所述,最大的子集 S 有 $1+8+7+7=23$ 个元素.

例 10 设集合 $A=\{1,2,\cdots,366\}$.如果 A 的一个二元子集 $B=\{a,b\}$ 满足 $17\mid(a+b)$,则称 B 具有性质 P.

(1) 求 A 的具有性质 P 的二元子集的个数;

(2) A 的一组二元子集,两两不相交且具有性质 P,这组二元子集的个数是多少?

(1994,河北省高中数学竞赛)

解:(1) 把 $1,2,\cdots,366$ 按被 17 除的余数分为 17 类:$[0],[1],\cdots,[16]$.

因为 $366=17\times21+9$,故 $[1],[2],\cdots,[9]$ 中各有 22 个数;$[10],[11],\cdots,[16]$ 和 $[0]$ 中各有 21 个数.

(i) 当 $a,b\in[0]$ 时,具有性质 P 的子集数为 $C_{21}^2=210$ 个;

(ii) 当 $a\in[k], b\in[17-k], k=1,2,\cdots,7$ 时,具有性质 P 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{21}^1=462$ 个;

(iii) 当 $a\in[8], b\in[9]$ 时,具有性质 P 的子集数为 $C_{22}^1\cdot C_{22}^1=484$ 个.

所以,A 的具有性质 P 的子集数共有 $210+462\times7+484=3\,928$ 个.

(2) 为了使二元子集不相交,当 $a,b\in[0]$ 时,可搭配出 10 个子集;

当 $a\in[k], b\in[17-k], k=1,2,\cdots,7$ 时,各可搭配出 21 个子集;

当 $a\in[8], b\in[9]$ 时,可搭配出 22 个子集.

因此,具有性质 P 的两两不相交的子集共有 $10+21\times7+22=179$ 个.

注:找到适当的标准即利用余数对集合划分,是解决此题的关键.

练 习 题

1. 设集合 $A=\{0,1,2,\cdots,9\}$, $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 是

A的一族非空子集构成的集合,且当 $i \neq j$ 时,$B_i \cap B_j$ 至多有两个元素.则 k 的最大值是______.

(1999,全国高中数学联赛广西赛区初赛(高三))

(提示:易知,A 的至多含有三个元素的所有子集所成的族符合题设要求,其中子集个数为 $C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^3 = 175$.再证明这是最大值即可.)

2.在集合 $M = \{1,2,\cdots,10\}$的所有子集中,有这样的一族不同的子集,它们两两的交集都不是空集.那么,这族集合的子集最多有(　　)个.

(A) 2^{10}　　(B) 2^9　　(C) 10^2　　(D) 9^2

(提示:对 M 的任一子集 A,易知 A 与 $M - A$ 至多有一个在题设的子集族 $\mathbf{A}$ 中,故$|\mathbf{A}| \leq 2^9$.)

3.已知两个实数集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$与 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$.若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中的每一个元素都有原像,且 $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \cdots \leq f(a_{100})$,则这样的映射共有(　　)个.

(A) C_{100}^{50}　　(B) C_{90}^{50}　　(C) C_{100}^{49}　　(D) C_{99}^{49}

(2002,全国高中数学联赛)

(提示:不妨设 $b_1 < b_2 < \cdots < b_{50}$,将 A 中元素 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$按顺序分为非空的 50 组.定义映射 $f: A \to B$,使得第 i 组的元素在 f 之下的像都是 b_i ($i = 1,2,\cdots,50$).易知,这样的 f 满足题设要求,每个这样的分组都一一对应满足条件的映射.于是,满足题设要求的映射 f 的个数与 A 按角码顺序分为 50 组的分法数相等.又 A 的分法数为 C_{99}^{49},则这样的映射共有 C_{99}^{49}个.故选(D).)

4.判断命题:“设 A、B 是坐标平面上的两个点集,$C_r = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.若对任何 $r \geq 0$ 都有 $(C_r \cup A) \subseteq (C_r \cup B)$,则必有 $A \subseteq B$”的真假.

(1984,全国高中数学联赛)

(提示:取 $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,$B$ 为 A 去掉(0,0)后的集合,易知,$(C_r \cup A) \subseteq (C_r \cup B)$,但 A 不包含在 B 中.)

5.设 $S = \{1,2,3,4\}$,n 项数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有以下性质:对于 S 的任何一个非空子集 B,在该数列中有相邻的$|B|$项恰好组成集合 B.求 n 的最小值.

(1997,上海市高中数学竞赛)

(提示:因为含 S 中的一个固定元素的二元子集有 3 个,所以,S 的任一元素在数列中至少出现两次.由此估算 n 的最小值为 8.另一方面,8 项数列:3,1,2,3,4,1,2,4 满足条件,故 n 的最小值为 8.)

6.已知集合 $M = \{1,2,\cdots,k\}$,对 $A \subseteq M$,将 A 中所有元素的和记为 $S(A)$.若可将 M 分为互不相交的两个子集 A、B,且 $A \cup B = M$,$S(A) = 2S(B)$.求 k 的所有值.

(1994,四川省高中数学竞赛)

(提示:因为 $A \cup B = M$,$A \cap B = \varnothing$,$S(A) = 2S(B)$,故 $S(M) = 3S(B) = \frac{k(k+1)}{2}$是 3 的倍数,即 $3 \mid k$ 或 $3 \mid (k+1)$.(1)当 $k = 3m$ 时,$A = \{1,3,4,6,\cdots,3m-2,3m\}$,$B = \{2,5,8,\cdots,3m-1\}$符合要求;(2)当 $k = 3m-1$ 时,$A = \{2,3,5,6,8,\cdots,3m-3,3m-1\}$,$B = \{1,4,7,\cdots,3m-2\}$符合要求.因此,$k = 3m$ 或 $k = 3m-1$.)